الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثانية: المتطابقات و المعادلات المثلثية

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

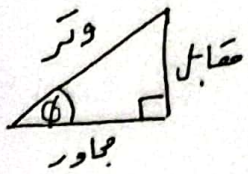
رقم الهاتف:

0777298115

* النسب المثلثية

$\tan\phi$ ، $\cos\phi$ ، $\sin\phi$

$\cot\phi$ ، $\sec\phi$ ، $\csc\phi$



1) $\sin\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

2) $\csc\phi = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

3) $\tan\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

4) $\cot\phi = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

5) $\cos\phi = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

6) $\sec\phi = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \qquad \tan\phi = \frac{1}{\cot\phi}$$

$$\cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \qquad \cot\phi = \frac{1}{\tan\phi}$$

$$\tan\phi \cdot \cot\phi = 1$$

$$\csc\phi = \frac{1}{\sin\phi} \Rightarrow \sin\phi = \frac{1}{\csc\phi}$$

$$\csc\phi \cdot \sin\phi = 1$$

$$\sec\phi = \frac{1}{\cos\phi} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sec\phi}$$

$$\cos\phi \cdot \sec\phi = 1$$

* قوانين المتممة

$$\sin(x) = \cos(90^\circ - x)$$
$$\cos(x) = \sin(90^\circ - x)$$
$$\tan(x) = \cot(90^\circ - x)$$

① $\sin(30^\circ) = \cos(90-30) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ أمثلة

② $\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45) = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

③ $\tan 60 = \cot(90-60) = \cot(30) = \sqrt{3}$

✳ $\pi = 180^\circ$ (زاوية بالدرجات π)

$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.14$ (عدد تقريبي بالراد π)

$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $3\frac{\pi}{2} = 270$, $2\pi = 360^\circ$

$5\frac{\pi}{3} = 300$, $2\frac{\pi}{3} = 120^\circ$, وهكذا

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
ϕ	30	60	45°
$\sin\phi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\phi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\phi$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

* $\sin(-x) = -\sin x$

* $\cos(-x) = \cos x$

* $\tan(-x) = -\tan x$

أمثلة

① $\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

② $\cos(-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

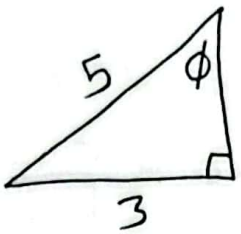
③ $\tan(-30) = -\tan 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

أمثلة

① $\cot 60 = \frac{1}{\tan 60} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

② $\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

③ $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$



مثال أوجد الاقترانات المثلثية الستة للزاوية ϕ بالمثلث المجاور

الحل المقابل = 3 ، الوتر = 5

المجاور = ؟؟ نجد المجاور أولاً حسب فيثاغورس

$$(3)^2 + (\text{المجاور})^2 = 5^2 \Rightarrow (\text{المجاور})^2 = 25 - 9 = 16$$

المجاور $= \sqrt{16} = 4$ ← الطول موجب دائماً

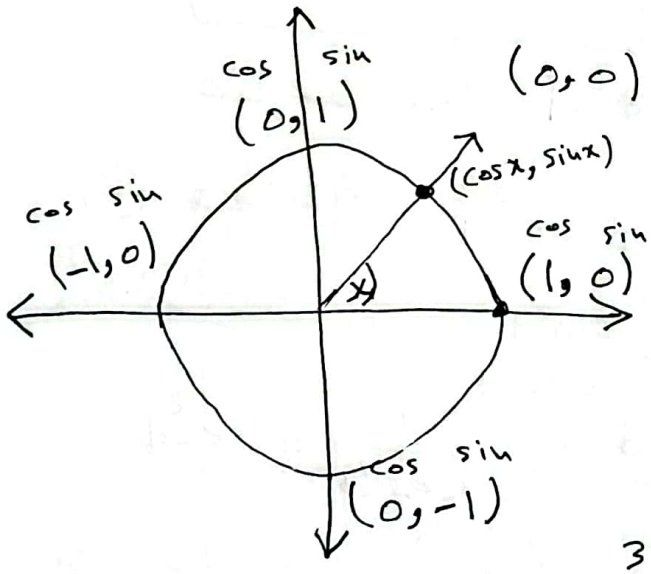
① $\sin\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$ ② $\cos\phi = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

③ $\tan\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$ ④ $\cot\phi = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{4}{3}$

⑤ $\sec\phi = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{4}$ ⑥ $\csc\phi = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{3}$

(*) دائرة الوحدة :

دائرة مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ ونصف قطرها وحدة واحدة



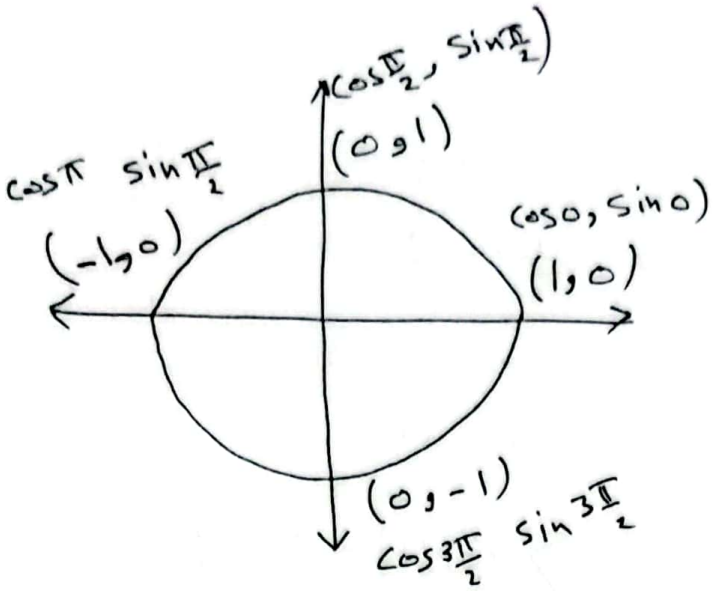
⇐ نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة هي $(\cos x, \sin x)$

الدائرة كاملة $= 360^\circ = 2\pi$

نصف الدائرة $= 180^\circ = \pi$

ربع الدائرة $= 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

ثلاثة أرباع الدائرة $= 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$



(*)

$$\tan 0 = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0 = \frac{1}{0} = \text{غ.م}$$

$$\sec 0 = \frac{1}{1} = 1$$

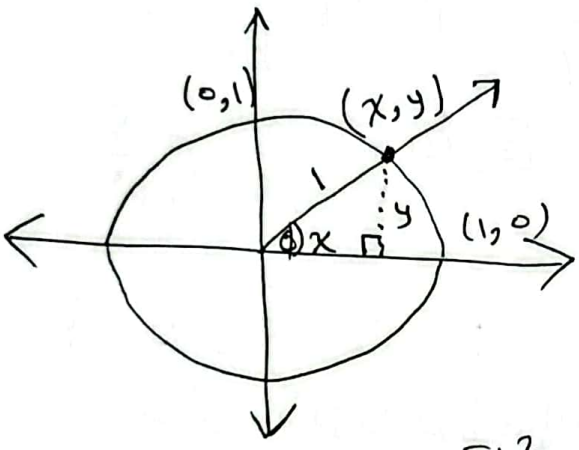
$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \text{غ.م}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

وهكذا .

$$\csc\pi = \frac{1}{0} = \text{غ.م}$$

$$\sec\pi = \frac{1}{-1} = -1$$



(*) فيثاغورس

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\boxed{\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1}$$

هذا هو برهان $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$

(*) مطابقة $1 + \tan^2\phi = \sec^2\phi$

البرهان

$$\text{الطرف الأيسر} = 1 + \tan^2\phi = \frac{1}{1} + \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$$

$$= \frac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} = \sec^2\phi$$

(*) مطابقة $1 + \cot^2\phi = 1$

البرهان

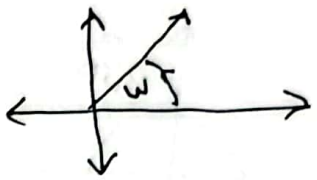
$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{1} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = \frac{\sin^2\phi + \cos^2\phi}{\sin^2\phi}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\phi} = \csc^2\phi$$

زاوية المرجع ($\acute{w}$)

زاوية المرجع للزاوية (w) هي الزاوية الحادة $\acute{w}$ المحصورة بين ضلع الانتهاء والجزء القريب من المحور X .

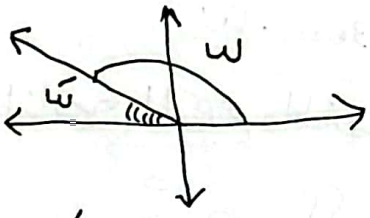
1 اذا كانت الزاوية (w) حادة تكون هي نفسها زاوية المرجع .



مثال ① زاوية المرجع لـ 30° هي 30°

② زاوية المرجع لـ 20° هي 20° وهكذا .

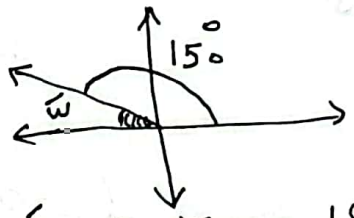
2 اذا كان ضلع الانتهاء للزاوية w بالربع الثاني تكون زاوية المرجع لها $\acute{w} = \pi - w$



$\acute{w} = \pi - w$

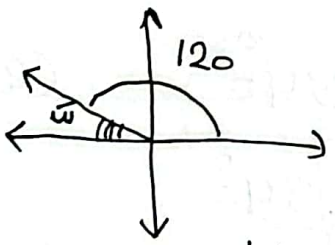
مثال اوجد زاوية المرجع لـ 15° ؟؟

الحل



$\acute{w} = \pi - 150 = 180 - 150 = 30^\circ$

مثال أوجد زاوية المرجع للزاوية 120° .



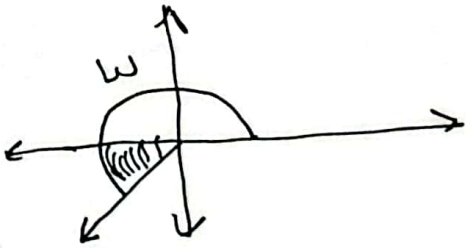
الحل

$\acute{w} = 180 - 120 = 60$

3 زاوية المرجع للزاوية w اذا كان ضلع الانتهاء بها بالربع الثالث هي

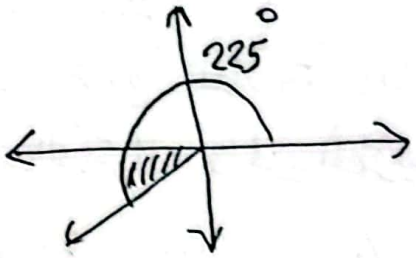
$\acute{w} = w - 180^\circ$

$\acute{w} = w - 180$



مثال اوجد زاوية المرجع للزوايا .

① 225° ؟؟ .

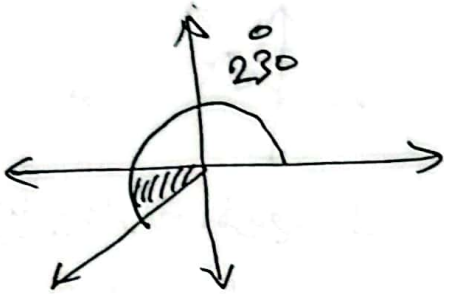


الحل

$\acute{w} = 225 - 180^\circ$

$\acute{w} = 45^\circ$

② 230° ؟؟

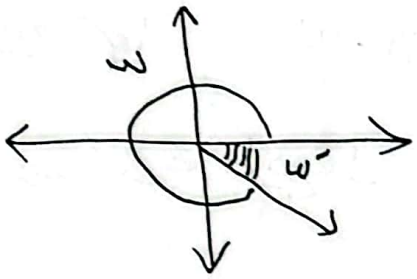


الحل

$\acute{w} = 230 - 180^\circ$

$\acute{w} = 50^\circ$

4 زاوية المرجع للزاوية w اذا كان ضلع الانتهاء بالربع الرابع

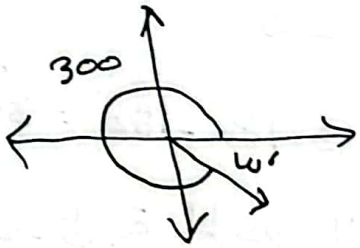


هـ $\acute{w} = 2\pi - w$

$= 360 - w$

مثال ما زاوية المرجع للزوايا

① 300° ؟؟ .

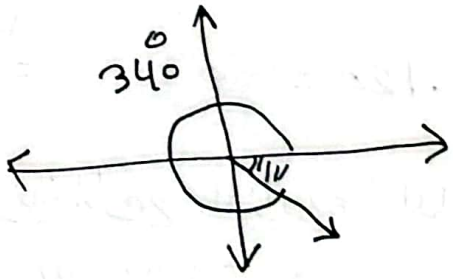


الحل

$\acute{w} = 360 - 300$

$\acute{w} = 60^\circ$

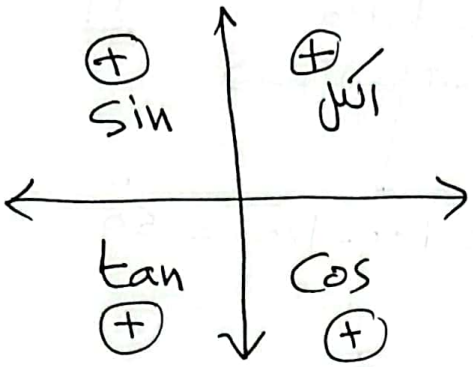
② 340° ؟؟

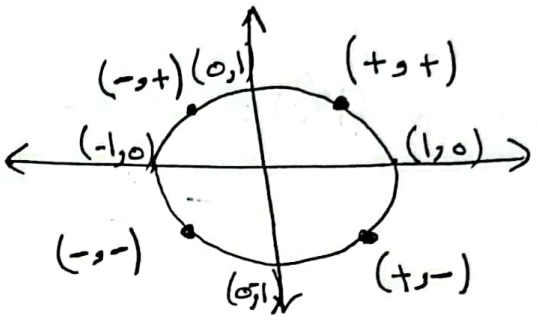


$\acute{w} = 360 - 340^\circ$

$\acute{w} = 20^\circ$

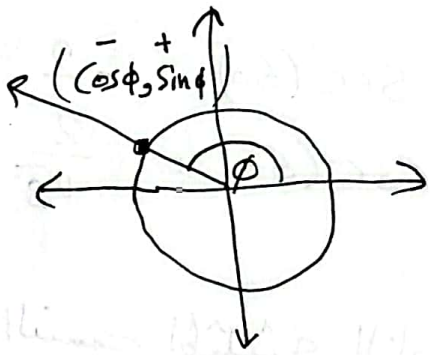
⊛ النسب المثلثيه لاي زاويه = نفس النسب المثلثيه لزاوية المرجع لها مع مراعاة الاشارة بالارباع .

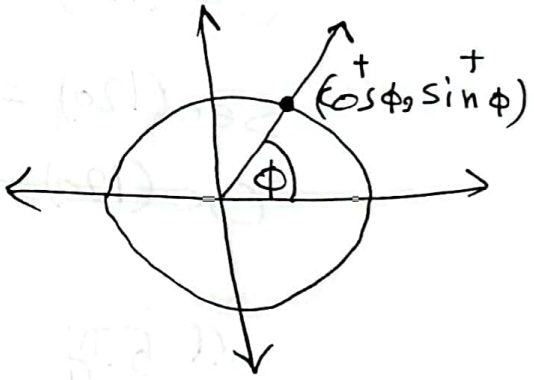


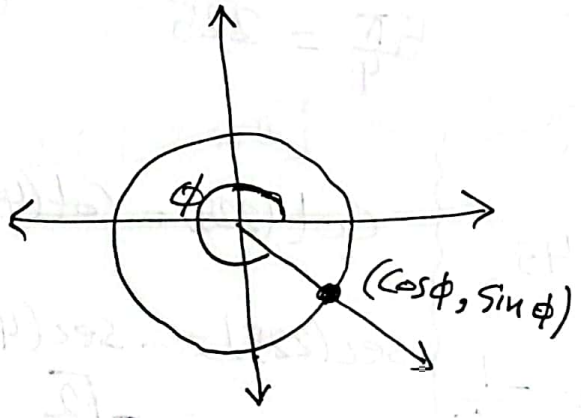


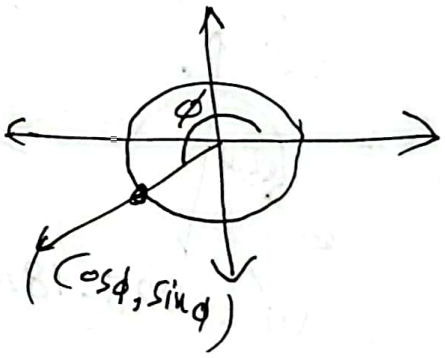
$$(x,y) = (\cos\phi, \sin\phi)$$

$$x = \cos\phi \ , \ y = \sin\phi$$







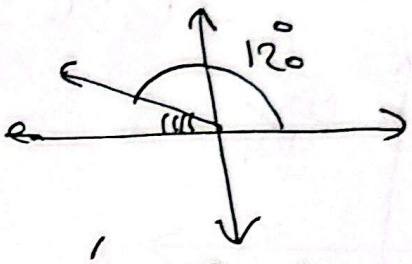


المزدوج المرتب (x,y) تقاطع ضلع الانتهاء الزاويه مع دائرة الوحدة هو $(\cos\phi, \sin\phi)$

مثال أجد $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ثم جد بقية النسب المثلثية.

الحل

$\frac{2\pi}{3} = 2(60) = 120^\circ$



$\therefore \cos(120^\circ) = -\cos 60$

$= -\frac{1}{2}$

$\omega = 180 - 120 = 60^\circ$

$\sin(120) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(120) = -\tan(60) = -\sqrt{3}$

$\cot(120) = -\cot(60) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

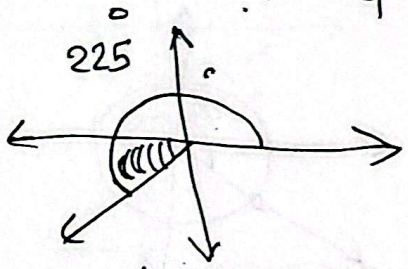
$\sec(120) = -\sec(60) = -2$

$\csc(120) = \csc(60) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

مثال أجد النسب المثلثية للزاوية $\frac{5\pi}{4}$

الحل

$\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$



$\omega' = 225 - 180 = 45$

$\sin(225) = -\sin(45) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(225) = -\cos(45) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\tan(225) = \tan 45 = 1$

$\cot(225) = \cot(45) = 1$

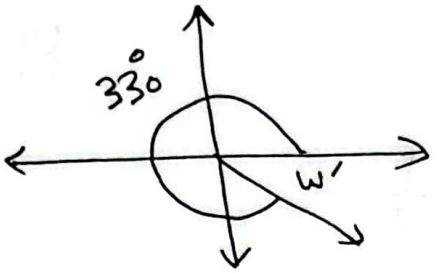
$\sec(225) = -\sec(45)$

$= -\sqrt{2}$

$\csc(225) = -\csc(45)$

$= -\sqrt{2}$

مثال: أجد النسب المثلثية الزاوية $\frac{11\pi}{6}$.



الحل

$$\frac{11\pi}{6} = 11(30) = 330$$

$$w' = 360 - 330 = 30^\circ$$

$$\sin(330) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(330) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(330) = -\tan 30 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(330) = -\cot(330) = -\sqrt{3}$$

$$\sec(330) = \sec(30) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc(330) = -\csc(30) = -2$$

(*) حل المعادلات المثلثية :

ايجاد قيمة الزاوية x التي تحقق المعادلة المثلثية .

مثال: حل المعادلة $2\cos x - 1 = 0$ ، $x \in [0, 2\pi]$

الحل

$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

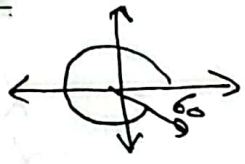
$$\cos x = \oplus \frac{1}{2}$$

الربع الأول + الرابع

زاوية المرجع 60°

ملاحظة الاشارة تحدد الربع

العدد يحدد زاوية المرجع



$x = 360 - 60$

$x = 300^\circ$

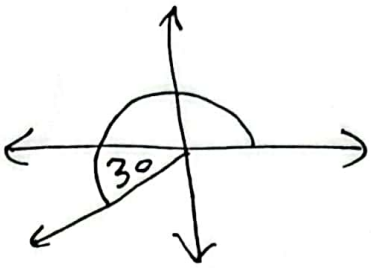
$x = 60^\circ$

مثال حل المعادلة $2\sin x + 1 = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

الحل

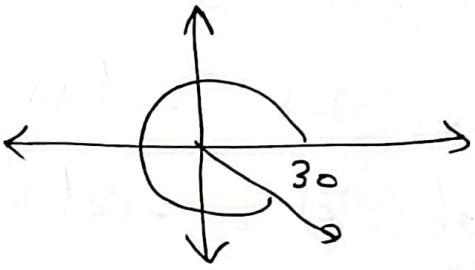
$$2\sin x = -1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$



الربع [3] + الربع [4]

زاوية المرجع $= 30^\circ$



$x = 180 + 30 = 210^\circ$

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$x = 360 - 30 = 330^\circ$

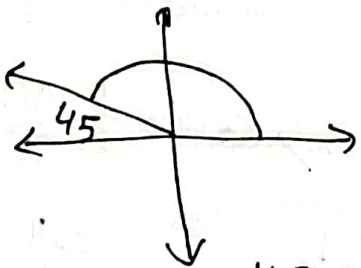
$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

مثال حل المعادلة $2\cos x + \sqrt{2} = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

الحل

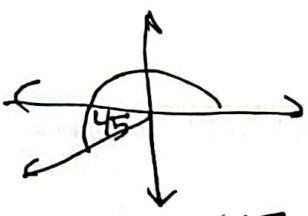
$$2\cos x = -\sqrt{2}$$

$$\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$



سالب بالربع [2] + الربع [3]

زاوية المرجع $= 45^\circ$



$x = 180 - 45 = 135^\circ$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$x = 180 + 45 = 225$

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

المتطابقات المثلثية (١)

١ $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$

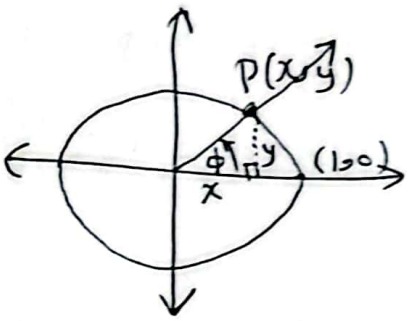
البرهان من دائرة الوحدة

$\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$

$\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi$

$\sin^2\phi - 1 = -\cos^2\phi$

$\cos^2\phi - 1 = -\sin^2\phi$



$P(x,y) = P(\cos\phi, \sin\phi)$

فيثاغورس $x^2 + y^2 = 1$

$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

مثال إذا $\sec\phi = \sqrt{3}$ أوجد قيمة $\sin\phi$ علماً أن $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ ← الربع الثاني.

الحل

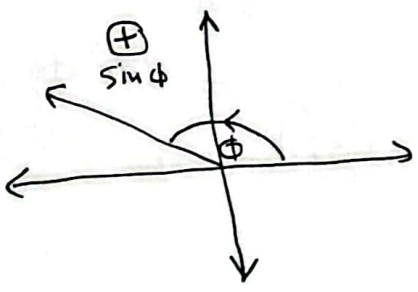
$$\sec\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos\phi} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

$$\sin^2\phi + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \sin^2\phi = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\phi = \mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\phi = +\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$\sin\phi$ موجب بالربع الثاني



مثال: إذا $\sin\phi = \frac{4}{5}$ ، $0 < \phi < \pi$

أوجد قيمة $\sec\phi$

الحل:

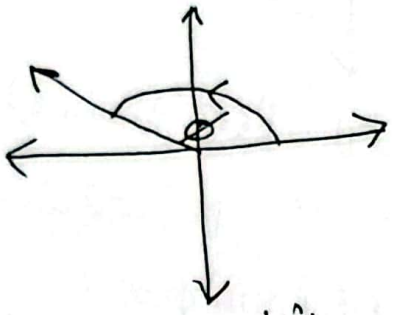
$\sec\phi = \frac{1}{\cos\phi} \Leftarrow$

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$

$\frac{16}{25} + \cos^2\phi = 1$

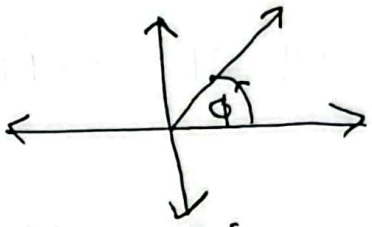
$\cos^2\phi = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\phi = \pm\frac{3}{5}$

الحل:



بالربع الثاني $\cos\phi = -\frac{3}{5}$

$\sec\phi = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$



بالربع الأول $\cos\phi = \frac{3}{5} \in$

$\sec\phi = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

نشتق $1 + \tan^2\phi = \sec^2\phi$ (*)

البرهان:

$1 + \tan^2\phi = \frac{1}{1} + \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$

$= \frac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos^2\phi}$

$= \frac{1}{\cos^2\phi} = \sec^2\phi$

$1 + \tan^2\phi = \sec^2\phi$

$\sec^2\phi - \tan^2\phi = 1$

$\tan^2\phi = \sec^2\phi - 1$

$\tan^2\phi - \sec^2\phi = -1$

$1 - \sec^2\phi = -\tan^2\phi$

اتحقق من فهمي ص 40 أجد قيمة $\tan\phi$ إذا علم أن

$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sec\phi = -\frac{3}{2}$

الحل

$$1+\tan^2\phi = \sec^2\phi$$
$$1+\tan^2\phi = \frac{9}{4}$$
$$\tan^2\phi = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$
$$\tan\phi = \mp\sqrt{\frac{5}{4}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}$$

ϕ بالربع الثالث $\quad \therefore \tan\phi = +\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\tan\phi$ موجب.

بما أن $\boxed{1+\cot^2\phi = \csc^2\phi}$ (*)

البرهان

$$1+\cot^2\phi = \frac{1}{1} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}$$
$$= \frac{\sin^2\phi + \cos^2\phi}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2\phi}$$
$$= \csc^2\phi$$

$\csc^2\phi - \cot^2\phi = 1$

$\cot^2\phi = \csc^2\phi - 1$

$1 - \csc^2\phi = -\cot^2\phi$

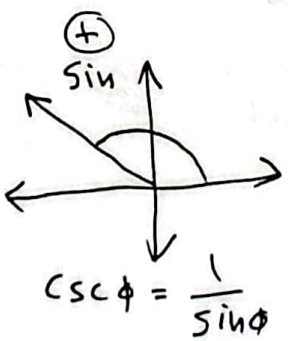
مثال إذا علم أن $\cot\phi = -2$

$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ أوجد $\csc^2\phi$ ؟؟

الحل

$$1+\cot^2\phi = \csc^2\phi$$
$$1+4 = \csc^2\phi$$
$$\csc^2\phi = 5 \Rightarrow \csc\phi = \mp\sqrt{5}$$

ϕ بالربع الثاني $\therefore \csc\phi = +\sqrt{5}$



مثال بسط المقادير المثلثية الآتية:

[1] $\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sec x$ [2] $\sin(\frac{\pi}{2}-x).\tan x$

الحل

① $\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sec x = \cos x \cdot \sec x$

$= \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

② $\sin(\frac{\pi}{2}-x)\tan x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x$

مثال بسط [1] $\cot(\frac{\pi}{2}-x)\cot x$ [2] $\sec(\frac{\pi}{2}-x)\sec x$

الحل

① $\cot(\frac{\pi}{2}-x)\cot x = \tan x \cot x$

$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$

② $\sec(\frac{\pi}{2}-x)\sin x = \csc x \cdot \sin x$

$= \frac{1}{\sin x} \cdot \sin x = 1$

ملاحظة اذا ورد بالمقام $1 \mp \sin x$ او $1 \mp \cos x$

او $\tan x \mp \sec x$ او $\csc x \mp \cot x$

ونريد التخلص من المقام نضرب بمرافق المقام ونقسم عليه.

مثال أعد كتابة $\frac{2}{1-\cos x}$ بحيث لا يحوي كسراً.

الحل

$$\frac{2}{1-\cos x} = \frac{2}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{2+2\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{2\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 2\csc^2 x + \frac{2}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 2\csc^2 x + 2\csc x \cot x$$

مثال اعد كتابة $\frac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسراً.

الحل

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec^2 x - \sec x \tan x$$

مثال اعد كتابة $\frac{1}{\tan x - \sec x}$ بحيث لا يحوي كسراً.

الحل

$$\frac{1}{\tan x - \sec x} = \frac{1}{\tan x - \sec x} \cdot \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x}$$

$$= \frac{\tan x + \sec x}{\tan^2 x - \sec^2 x} = \frac{\tan x + \sec x}{-1}$$

$$= -\tan x - \sec x$$

مثال اعد كتابة $\frac{1}{\csc 3x + \cot 3x}$ بحيث لا يحوي كسر

H.W

اتمرين في ص 41 بسط المقادير الآتية

a) $\sin x(\csc x - \sin x)$ b) $1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$

الحل

① المقدار $= \sin x \csc x - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

② المقدار $= 1 + \tan x + \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= 1 + \tan x + \frac{\cos x (1-\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$= 1 + \tan x + \frac{\cos x (1-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= 1 + \tan x + \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

$= 1 + \tan x + \sec x - \tan x$

$= 1 + \sec x$

⊛ إثبات صحة المتطابقة:

لتمكن استخدام ما يلي لإثبات صحة متطابقة:

* - تعريف الاقترانات المثلثية * - المتطابقات الأساسية

المبادئ العامة لإثبات صحة متطابقة

1- البدء بأحد طرفي المتطابقة 2- استعمال المتطابقات المعروفة

3- التحويل إلى اقتران الجيب أو جيب التمام

مثال: اثبت صحة المتطابقة $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

الحل

الطرف الأيسر $= \sin x \tan x = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \sec x - \cos x$$

H.W

يمكن حل المثال السابق بأخذ الطرف الأيمن

مثال: اثبت صحة المتطابقة $\cos x \cot x = \csc x - \sin x$

الحل نأخذ الطرف الأيسر

$$\cos x \cot x = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \csc x - \sin x$$

حل آخر: بأخذ الطرف الأيمن

$$\csc x - \sin x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{1} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos x}{1} * \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cos \cot x$$

مثال اثبت صحة المتطابقة $\sec x + \tan x = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل ① أوسط

الطرف الأيمن $= \frac{\cos x}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec x + \tan x$

الحل ②

الطرف الأيسر $= \sec x + \tan x$

$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$= \frac{1+\sin x}{\cos x} * \frac{\cos x}{\cos x}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

مثال الكتاب ص 43 حل آخر

اثبت صحة المتطابقة

$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$ نضرب بمرافق المقام ونقسم عليه تكسر أول

$= \frac{\sin x}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin x (1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \csc x + \cot x$

$= \frac{\sin x (1-\cos x)}{\sin^2 x} + \csc x + \cot x$

$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \csc x + \cot x$

$= \csc x - \cot x + \csc x + \cot x$

$= 2 \csc x$

حل آخر

الطرف الأيسر $= \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$ توحيد المقامات

$= \frac{\sin^2 x + 1 + \cos x + \cos x + \cos^2 x}{\sin x (1+\cos x)}$

$= \frac{1+1+2\cos x}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{\sin x (1+\cos x)}$

$= \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x$

اتحقق من فهمي ص 44 فرع (b)

اثبت صحة المتطابقة

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

البرهان

الطرف الأيسر $= \frac{1-\cos x}{\sin x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

ملاحظ

الطرف الأيمن $= \frac{\sin x}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$

$$= \frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

اتحقق من فهمي ص 44 فرع (c)

اثبت صحة المتطابقة

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$$

الحل توحيد مقامات

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1+\cos x + 1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$$

حل آخر H.W الضرب بالمرافق للمقام لكل من الكسرين والقسمة عليه.

مثال [5] ص 44 كتاب اثبت صحة $\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$

أحياناً نحتاج أن نأخذ الطرفين ونتوصل لنفس النتيجة.

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \boxed{\sec x + 1}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$$

$$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{\sec x - 1}$$

$$= \boxed{\sec x + 1}$$

بما أن الطرفان توصلا لنفس النتيجة عليه تكون المتطابقة صحيحة.

حل آخر

الطرف الأيسر $= \dfrac{\tan^2 x}{\sec x - 1} * \dfrac{\sec x + 1}{\sec x + 1}$

$= \dfrac{\tan^2 x (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \dfrac{\tan^2 x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$

$= \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}$

اختر من فضلك ص 44 أثبت صحة المتطابقة

$$(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$$

الطرف الأيسر $= \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} \right)^2$

$= \left(\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sin x \cos x} \right)^2$

$= \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ——— (*)

الطرف الأيمن $= \sec^2 x + \csc^2 x$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ——— (**)

بما أن الطرفان توصلا إلى نفس المقدار
∴ المتطابقة صحيحة .

متطابقات المجموع والفرق

* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
* $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
* $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
* $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
* $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

مثال اوجد قيمة $\sin 15^\circ$ دون استعمال الآلة الحاسبة

الحل

$15^\circ = 45 - 30$

$$\sin 15^\circ = \sin(45-30)$$
$$= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال اوجد قيمة $\sin\left(7\frac{\pi}{12}\right)$ دون استعمال الآلة الحاسبة.

الحل

$$7\frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(7\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

مثال اوجد قيمة $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال أوجد قيمة $\tan\frac{\pi}{12}$ دون استخدام الحاسبة.

الحل

$$\frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = (45^\circ - 30^\circ)$$

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1*\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

مثال اوجد قيمة $\tan\frac{5\pi}{12}$ دون استعمال الآلة الحاسبة.

الحل

$$\frac{5\pi}{12} = 75 = 30^\circ + 45^\circ$$

$$\tan(75^\circ) = \tan(30 + 45)$$

$$= \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \tan 45}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}*1} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

مثال أوجد قيمة المقدار $\sin 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 70^\circ \sin 10^\circ$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$$\sin 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 70^\circ \sin 10^\circ = \sin(70-10)$$
$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال اوجد قيمة $\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$$\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ = \cos(20+25)$$
$$= \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال اوجد قيمة $\dfrac{\tan 35^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 35^\circ \tan 25^\circ}$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

المقدار $= \tan(35+25) = \tan 60 = \sqrt{3}$

مثال اثبت صحة المطابقة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ مطابقة ثلثية.

الحل

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$$
$$= 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x$$
$$= \cos x$$

مثال اثبت صحة المطابقة $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

الحل

الطرف الأيمن $= \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

مسائل الكتاب ص 47

س3 اوجد قيمة $\tan\phi$ علماً $\csc\phi = \frac{-5}{3}$ ، $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$

الحل

$$\sin\phi = \frac{1}{\csc\phi} = \frac{1}{\frac{-5}{3}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\phi = 1$$

$$\cos^2\phi = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos\phi = \mp\frac{4}{5}$$

$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ بالربع الثالث $\Leftarrow \cos\phi = -\frac{4}{5}$

$$\therefore \tan\phi = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

س4 ص 47 اوجد قيمة $\sin\phi$ علماً $\sec\phi = \frac{9}{4}$ ، $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$

الحل

$$\cos\phi = \frac{1}{\sec\phi} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \Rightarrow \sin^2\phi + \frac{16}{81} = 1$$

$$\sin^2\phi = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

$$\sin\phi = \mp\frac{\sqrt{65}}{9}$$

بالربع الرابع $\Leftarrow \sin\phi = -\frac{\sqrt{65}}{9}$

س6 ص 47 بسط العبارة المثلثية $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x}$.

الحل

$$\text{العبارة} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1}}{\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} * \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

س 7 ص 47 بسط العبارة $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x}+\cos^2 x$

الحل

الطرف $= \dfrac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + \cos^2 x$

$= \sin x \cdot \sin x + \cos^2 x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

س 8 ص 47 بسط العبارة $\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

الحل ①

الطرف $= \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\sin x}$

$= \tan x - 1 + \cot x - 1$

$= \tan x + \cot x - 2$

الحل ② بتوحيد المقامات

الطرف $= \dfrac{(\sin x - \cos x)\sin x + (\cos x - \sin x)\cos x}{\cos x \cdot \sin x}$

$= \dfrac{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$

$= \dfrac{1 - 2\sin x \cos x}{\sin x \cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x \cos x} - \dfrac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$

$= \csc x \sec x - 2$

س 9 ص 47 أبسط المقدار $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\cos x}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\sin^2 x+2\sin x*\cos x+\cos^2 x}{\sin x*\cos x}$

$= \dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x}+\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$

$= \csc x\sec x+2$

س 11 ص 47 أثبت صحة المتطابقة

$\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x) = -\csc x$

الحل

الطرف الأيسر $= -\cot x\cos x-\sin x$

$= -\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{1}$

$= \dfrac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x} = \dfrac{-1}{\sin x} = -\csc x$

س أبسط المقدار $\dfrac{\sec x-\cos x}{\tan x}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{1}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$

13) ص 47 اثبت صحة المطابقة

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\cos x^2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

الحل (1)

الطرف الأيسر $=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$

$=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ـــــ [1]

الطرف الأيمن $=\dfrac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ [2]

من (1) و (2) الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

∴ المطابقة صحيحة

الحل (2)

الطرف الأيسر $=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$

$=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\times\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}$

$=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$ = الطرف الأيمن

14) اثبت صحة المطابقة

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=(\sec x-\tan x)^2$$

الحل (k)

الطرف الأيسر $= \frac{1-\sin x}{1+\sin x} * \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}$

$= \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$

$= (\sec x - \tan x)^2$

16) اثبت صحة المطابقة

$$\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} = 2\sec x \tan x$$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{2\sin x}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sec x \tan x$

17) اثبت أن $\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x|$

الحل

الأيسر $= \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| = \ln \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$

$= \ln|\sin x| - \ln|\cos x|$

18) اثبت أن

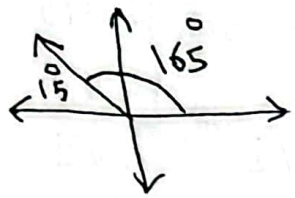
$$\ln|\sec x + \tan x| + \ln|\sec x - \tan x| = 0$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| \cdot |\sec x - \tan x|$$

$$= \ln|\sec^2 x - \tan^2 x| = \ln 1 = 0$$

$\sin 165^\circ$ دون استعمال الآلة الحاسبة في صيغة $\frac{48}{19}$ ص

الحل

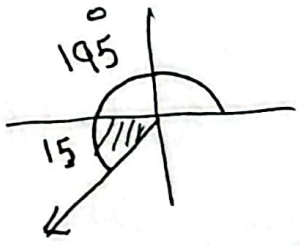


$180^\circ - 165 = 15^\circ$

$$\sin 165^\circ = \sin 15^\circ$$
$$= \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\tan 195^\circ$ دون استعمال الآلة الحاسبة في صيغة $\frac{48}{20}$ ص

الحل



$195 - 180 = 15^\circ$

$$\tan 195^\circ = \tan 15 = \tan(60 - 45)$$
$$= \frac{\tan 60 - \tan 45}{1 + \tan 60 \tan 45}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}(1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} * \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$$

س22 اوجد قيمة $\sin\frac{17\pi}{12}$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$$\frac{17\pi}{12} = \frac{17*180}{12} = 255^\circ$$

$$\sin(225) = \sin(255-180) = \sin 75^\circ$$

$$= \sin(30+45)$$

$$= \sin 30\cos 45 + \cos 30 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

س23 جد قيمة المقدار $\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}$

الحل

$$\text{المقدار} = \sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{18}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*) مراجعة

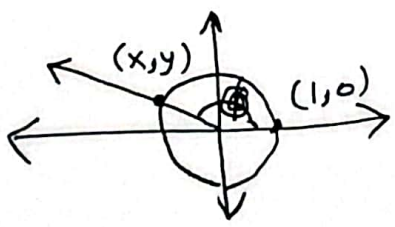
تذكر: معادلة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ نقطة الأصل ونصف قطرها r هي $x^2+y^2=r^2$

أمثلة ① دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ دائرة $x^2+y^2=1$

② دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=3$ دائرة $x^2+y^2=9$

③ دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{7}$ دائرة $x^2+y^2=7$

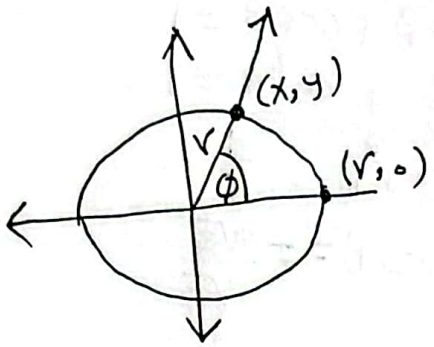
(*) اذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية ϕ دائرة الوحدة عند (x,y) فإن



$\sin\phi = x$

$\cos\phi = y$

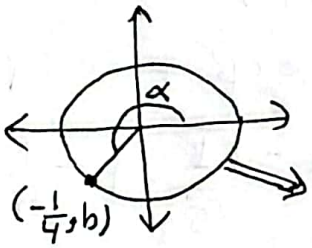
⊛ تعميم لكل عام اذا كان ضلع الانتهاء للزاوية ϕ بالوضع القياسي دائره مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها (r) عند النقطة (x,y) فان

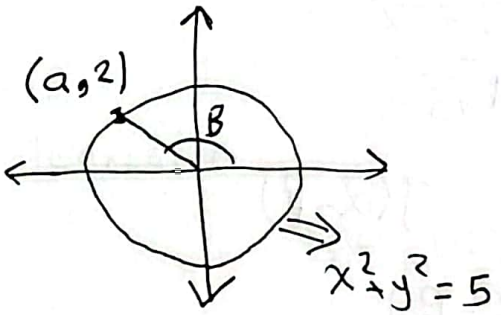


$$\cos\phi = \frac{x}{r}$$

$$\sin\phi = \frac{y}{r}$$

⊛ استعمل الشكل المجاور لايجاد قيمة كل من المقدارين الآتيه علماً ان





$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$

$h(x)=\tan x$

س 25 ص 48 جد قيمه $f(\alpha+\beta)$

الحل ⇐ من الشكل الاول

$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

$\sin\alpha = b$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} + \sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

③ بما ان α من الربع الثالث $\sin\alpha$ ← $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$ ← من الشكل المثلثي $r = \sqrt{5}$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\frac{4}{5} + \cos^2\beta = 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{1}{5}$$

β بالربع الثاني $\Leftarrow \cos\beta$ سالب

$$\leftarrow \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= -\frac{\sqrt{15}}{4} * -\frac{1}{\sqrt{5}} + -\frac{1}{4} * \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{15} - 2}{4\sqrt{5}}$$

$g(\alpha-\beta)$ اوجد قيمة 48 ص 26 س

الحل

$$g(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= -\frac{1}{4} * \frac{-1}{\sqrt{5}} + -\frac{\sqrt{15}}{4} * \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}$$

$h(\alpha+\beta)$ ← 27 س

الحل

$$h(\alpha+\beta) = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{15} + -2}{1 - \sqrt{15}(-2)} = \frac{\sqrt{15} - 2}{1 + 2\sqrt{15}}$$

28 ص 48 يمكن قياس معامل انكسار الضوء الابيض في المنشور باستعمال المعادلة

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}}$$

اذا علمت $\alpha = 60^\circ$

اثبت ان معادلة معامل الانكسار تكتب بصورة

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{\phi}{2}$$

الحل

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}+30\right)}{\sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\sin\frac{\phi}{2}\cos 30 + \cos\frac{\phi}{2}\sin 30}{\sin\frac{\phi}{2}}$$

$$n = \frac{\sin\frac{\phi}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\phi}{2} * \frac{1}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$$

بقسمة البسط والمقام على $\sin\frac{\phi}{2}$

$$n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \cot\frac{\phi}{2} * \frac{1}{2}}{1}$$

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{\phi}{2} \quad \#$$

س 29 ص 48 اذا $g(x)=\cos x$ ، β أثبت أن

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1-\cosh}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sinh}{h}\right)$$

الحل

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x\cosh-\sin x\sinh-\cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x\cosh-\cos x}{h} - \left(\frac{\sin x\sinh}{h}\right)$$

$$= -\cos x\frac{(-\cosh+1)}{h} - \sin x\cdot\frac{\sinh}{h}$$

$$= -\cos x\left(\frac{1-\cosh}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sinh}{h}\right)$$

س 30 ص 48 اذا β

a ، b حيث $\sin(x+\frac{\pi}{6}) = a\sin x + b\cos x$

الحل

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{6}) = \sin x\cos\tfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\tfrac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , b = \frac{1}{2}$$

س 31 اثبت صحة $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

الحل

$$= \sin A\cos B + \cos A\sin B + \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$= \sin A\cos B + \sin A\cos B = 2\sin A\cos B$$

س 32 ص 48 اثبت صحة المتطابقة

$$\sin A \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$$

الحل

$$\sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin A \cos\frac{\pi}{4} + \cos A \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin A + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos A\right)$$

$$= \sin A + \cos A$$

س 33 اثبت صحة المتطابقة

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} = 0$$

الحل نبدأ بالطرف الأيسر

$$= \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C} - \frac{\cos B \sin C}{\cos B \cos C} +$$

$$\frac{\sin C \cos A}{\cos C \cos A} - \frac{\cos C \sin A}{\cos C \cos A}$$

$$= \tan A - \tan B + \tan B - \tan C + \tan C - \tan A$$

$$= 0$$

تمرين ص 48 اثبت صحة المتطابقة

$$\cos(x+y) * \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$

الحل

$$\text{الأيسر} = (\cos x \cos y - \sin x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

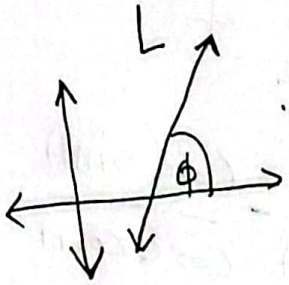
$$= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y$$

$$= \cos^2 x (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 y \cos^2 x - \sin^2 y + \sin^2 y \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 y$$

(**) ملاحظة (حفظ).

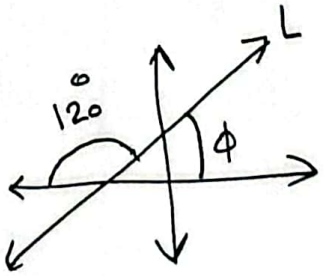


ميل المستقيم L حيث $\tan\phi = L$

ϕ = الزاوية المحصورة بين المستقيم L

و محور x الموجب (بالاتجاه المعاكس لدوران محور x).

$$m = \tan\phi \quad , \quad 0 < \phi < \pi$$

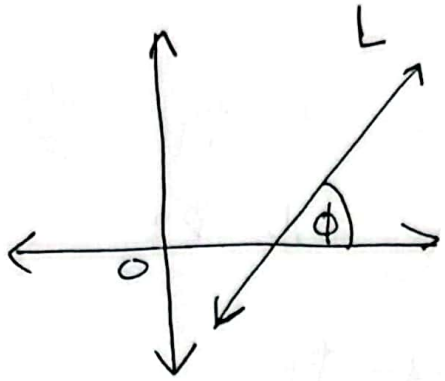


مثال في الشكل المجاور جد ميل المستقيم L

الحل

$$\phi = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



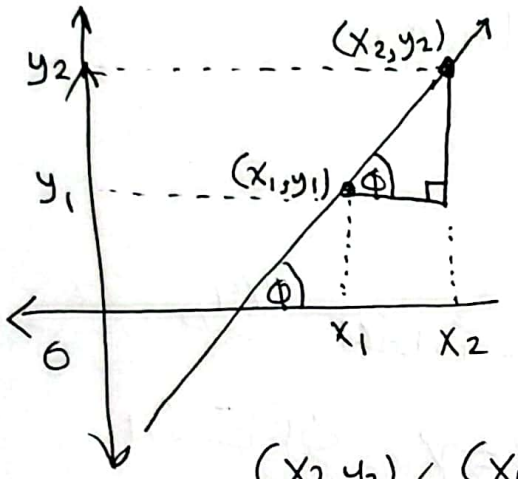
تمرين 35 ص 49

اثبت أن $m = \tan\phi$

حيث m : ميل المستقيم L

ϕ : زاوية الميل .

الحل نختار نقطتين على المستقيم L (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)



المجاور لـ $\phi = x_2 - x_1$

المقابل لـ $\phi = y_2 - y_1$

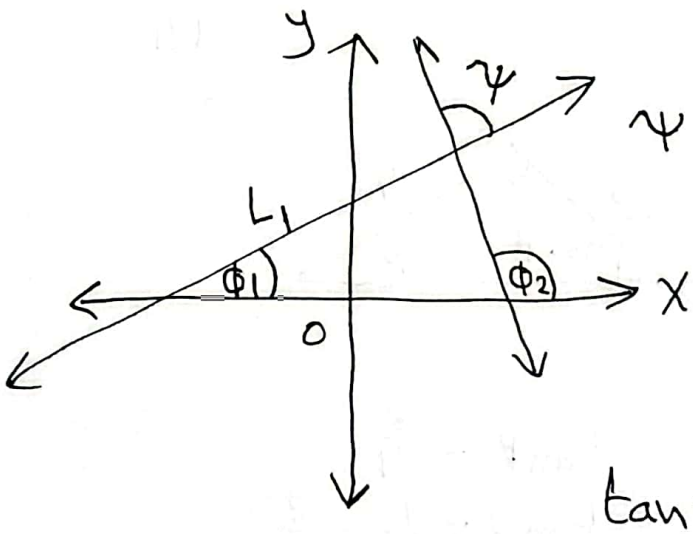
$$\tan\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{---} \boxed{1}$$

② ميل المستقيم L الواصل بين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{---} \boxed{2}$$

$\therefore m = \tan\phi$

تمرين 36 ص 49



$\psi = \phi_2 - \phi_1$

L_1 ، L_2 مستقيمين غير متوازيين ميلاهما m_1 ، m_2 على الترتيب

اثبت أن $\tan\psi = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

الحل

$\tan\phi_1 = m_1$ ⇐ L_1 ميل زاوية ϕ_1

$\tan\phi_2 = m_2$ ⇐ L_2 ميل زاوية ϕ_2

$\psi = \phi_2 - \phi_1$

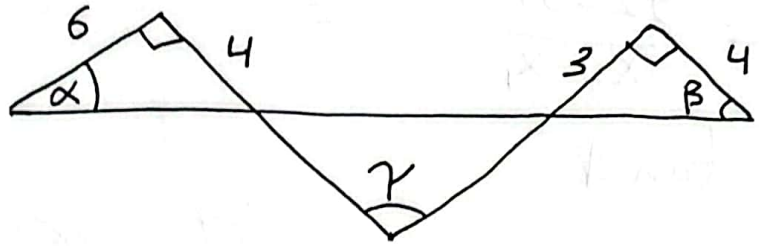
$$\tan(\psi) = \tan(\phi_2 - \phi_1)$$

$$= \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2}$$

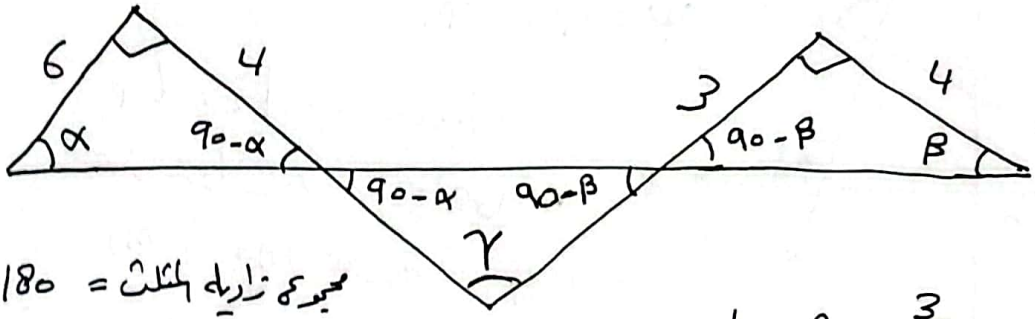
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

س 37 ص 49 اعتماداً على الشكل الآتي

اثبت ان $\alpha + \beta = \gamma$ ثم أجد $\tan\gamma$



الحل



مجموع زوايا المثلث = 180

$90 - \alpha + 90 - \beta + \gamma = 180$

$\gamma = 180 - 180 + \alpha + \beta$

$\gamma = \alpha + \beta$

$\tan\beta = \frac{3}{4}$

$\tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\tan\gamma = \tan(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}*\frac{3}{4}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}}$$
$$= \frac{17}{6}$$

38 ص 49 اذا $\tan\beta = x-1$ ، $\tan\alpha = x+1$ اثبت ان

$$2\cot(\alpha-\beta) = x^2$$

الحل

$$2\cot(\alpha-\beta) = \frac{2}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{2}{\frac{\tan(\alpha)-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$
$$= 2*\left(\frac{1+(x+1)(x-1)}{x+1-(x-1)}\right) = 2\left(\frac{x+x^2-x}{2}\right)$$
$$= 2*\frac{x^2}{2} = x^2$$

39 اوجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل

$$\sin(30+45) = \sin30\cos45 + \cos30\sin45$$
$$= \frac{1}{2}*\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ملاحظة $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ← الزاوية التي sin لها تساوي $\frac{1}{2}$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ← الزاوية التي sin لها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$

40

(2) المتطابقات المثلثية

متطابقات ضعف الزاوية:

[1] $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

[2] $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \rightarrow A$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow B$

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow C$

[3] $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

مفهوم أساسي

حفظ

برهان [1]

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x) \\ &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\ &= 2\sin x \cos x\end{aligned}$$

تطبيقات على [1]

① $\sin(4x) = 2\sin 2x \cos 2x$

② $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

③ $\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$

نتائج 1

$2\sin x \cos x = \sin 2x$

$$\boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

$\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$

$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$

$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin 6x$

$\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}\sin 3x$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{—— (A)}$$

برهان 2

$$\cos(2x) = \cos(x+x)$$
$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x \quad \text{—— (B)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 \quad \text{—— (C)}$$

برهان 3

$$\tan(2x) = \tan(x+x)$$
$$= \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \cdot \tan x}$$
$$= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

مثال اذا علم $\cos x = \frac{2}{3}$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ جد $\sin(2x)$

الحل

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x + \frac{4}{9} = 1$$
$$\sin^2 x = \frac{5}{9}$$
$$\sin x = +\frac{\sqrt{5}}{3}$$ (x بالربع الاول)

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$= 2 * \frac{\sqrt{5}}{3} * \frac{2}{3}$$
$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

مثال اذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ حيث ان: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ الربع الثاني

اوجد [1] $\cos 2x$ [2] $\tan 2x$

الحل

[1] $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$

$= \frac{7}{25}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{16}{25}$

$\cos x = -\frac{4}{5}$

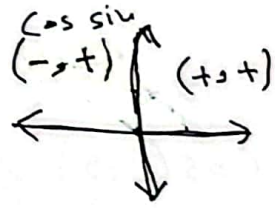
لان x بالربع الثاني

$\tan x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4}$

[2] $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$= \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 - \frac{9}{16}}$

$= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{-3}{2} * \frac{8}{7} = \frac{-24}{7}$



52 اكتب مسألة وحلها

اذا كان $\cos\phi = -\frac{2}{3}$ و $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

a) $\sin 2\phi$ b) $\cos(2\phi)$ c) $\tan(2\phi)$

الحل

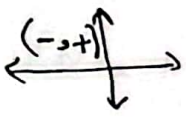
$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$

$\sin^2\phi + \frac{4}{9} = 1$

$\sin^2\phi = \frac{5}{9}$

$\sin\phi = +\frac{\sqrt{5}}{3}$

بالربع الثاني



a) $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$

$= 2 * \frac{\sqrt{5}}{3} * \frac{-2}{3}$

$= -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi = 1 - 2*\frac{5}{9}$

$= \frac{1}{1} - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9}$

c) $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\tan\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = \frac{2*-\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{5}{4}}$

$= \frac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}} = 4\sqrt{5}$

مثال اكتب $\cos 3\phi$ بدلالة $\cos\phi$.

الحل

$\cos(3\phi) = \cos(2\phi + \phi)$

$= \cos 2\phi \cos\phi - \sin 2\phi \sin\phi$

$= (2\cos^2\phi - 1)\cos\phi - 2\sin\phi\cos\phi \cdot \sin\phi$

$= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2\sin^2\phi\cos\phi$

$= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2(1-\cos^2\phi)\cos\phi$

$= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2\cos\phi + 2\cos^3\phi$

$= 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$

ملاحظة يمكن أن تكون صيغة المثال السابق الحل أنه

اثبت أن: $\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$

مثال اثبت ان: $\sin 3\phi = 4\sin\phi\cos^2\phi - \sin\phi$

او اكتب $\sin 3\phi$ بدلالة $\sin\phi$ ، $\cos\phi$

الحل

$$\sin(3\phi) = \sin(2\phi + \phi)$$

$$= \sin 2\phi \cos\phi + \cos 2\phi \sin\phi$$

$$= 2\sin\phi\cos\phi \cdot \cos\phi + (2\cos^2\phi - 1)\sin\phi$$

$$= 2\sin\phi\cos^2\phi + 2\cos^2\phi\sin\phi - \sin\phi$$

$$= 4\sin\phi\cos^2\phi - \sin\phi$$

مثال اثبت ان $\sin(3\phi) = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$

او (اكتب $\sin 3\phi$ بدلالة $\sin\phi$ فقط).

الحل

$$\sin(3\phi) = \sin(2\phi + \phi)$$

$$= \sin 2\phi \cos\phi + \cos 2\phi \sin\phi$$

$$= 2\sin\phi\cos\phi \cdot \cos\phi + (1 - 2\sin^2\phi)\cdot\sin\phi$$

$$= 2\sin\phi\cos^2\phi + \sin\phi - 2\sin^3\phi$$

$$= 2\sin\phi(1 - \sin^2\phi) + \sin\phi - 2\sin^3\phi$$

$$= 2\sin\phi - 2\sin^3\phi + \sin\phi - 2\sin^3\phi$$

$$= 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$$

⊛ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

متطابقات تقليص القوة (الأس):

[1] $\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$ ← تقليص القوة

$\sin\phi = \mp\sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}}$ ← نصف الزاوية

$\sin\frac{\phi}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}$ ← نصف الزاوية

برهان [1]

$\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$

$2\sin^2\phi = 1 - \cos 2\phi$

$\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$

مثال برهن ان $\sin\frac{\phi}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}$

الحل

$\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$

$2\sin^2\frac{\phi}{2} = 1 - \cos\phi$

$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{2}$ | $\sqrt{\ }$

$\sin\frac{\phi}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}$

متطابقة 2

$$\cos^2\phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2} \longrightarrow \text{تخفيض القوة}$$

$$\cos\phi = \mp\sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}} \longrightarrow \text{نصف الزاوية}$$

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \mp\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}} \longrightarrow \text{نصف الزاوية}$$

برهان 2

$$\cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1$$

$$2\cos^2\phi = 1 + \cos 2\phi$$

$$\cos^2\phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2}$$

$$\cos\phi = \mp\sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}$$

متطابقة 3

$$\tan^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{1+\cos 2\phi} \longrightarrow \text{تخفيض القوة}$$

$$\tan\phi = \mp\sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{1+\cos 2\phi}} \longrightarrow \text{نصف الزاوية}$$

$$\tan\frac{\phi}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}} \longrightarrow \text{نصف الزاوية}$$

برهان 3

$$\tan^2\phi = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{\frac{1-\cos 2\phi}{2}}{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}$$

$$= \frac{1-\cos 2\phi}{1+\cos 2\phi}$$

مثال أعد كتابة $\sin^2 x \cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام

الأجوبة = ١

الحل

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\cos^2 2\phi}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2\phi$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4\phi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\phi\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\phi$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\phi$$

مثال أعد كتابة $\sin^4 x \cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام

الحل

$$\sin^4 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \cdot \cos^2 x$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{2\times 1}{2\times 4} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)$$

$$= \frac{1 - \cos 4x - \cos 2x + \cos 2x \cos 4x}{16}$$

مثال اوجد $\cos(22.5)^\circ$ بدلالة الزاوية المعطاة.

الحل

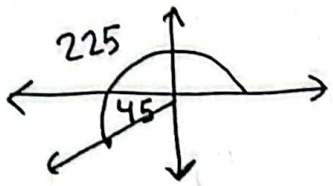
$$\cos(22.5) = \cos\left(\frac{45}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

مثال أوجد قيمة $\cos(112.5)^\circ$ بدون استخدام الآلة الحاسبة.



الحل

225 نصف 112.5

$$\cos(225) = -\cos 45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

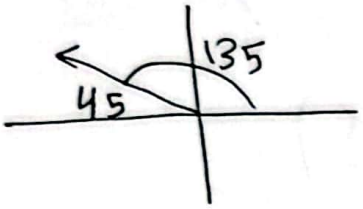
$$\cos(112.5) = -\sqrt{\frac{1+\cos 225}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{2}}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

مثال اوجد $\tan(67.5)^\circ$ بدون استعمال الآلة الحاسبة

الحل



135° تعني 67.5

$$\tan 135 = -\tan(45)$$
$$\equiv -1$$

$$\cos(135) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(\frac{135}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 135}{1+\cos 135}}$$

$$= \sqrt{\frac{1--\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+-\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

مثال اذا كان $\cos x = \frac{-3}{5}$ حيث $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ فجد

① $\sin\frac{x}{2}$ ② $\cos\frac{x}{2}$ ③ $\tan\frac{x}{2}$

الحل

① $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1--\frac{3}{5}}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{4}{5}} = +\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

بالربع الثاني

② $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1+\frac{-3}{5}}{2} = \frac{2}{10}$

$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{2}{2*5}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{-1}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$

بالربع الثاني

③ $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1--\frac{3}{5}}{1+-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}$

$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = -\sqrt{4}$

$= -2$

بالربع الثاني.

مثال اذا كان $\sin x = -\frac{2}{5}$ حيث: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

اوجد ① $\tan\frac{x}{2}$ ② $\cos\frac{x}{2}$

الحل

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Leftarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi$

بالربع الثاني

① $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1--\frac{2}{5}}{1+-\frac{2}{5}}$

$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{3}$

$\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{21}}{3}$

② $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1+-\frac{2}{5}}{2} = \frac{3}{2}$

$\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

متطابقات تحويل الضرب الى مجموع او فرق

[1] $\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)]$

الاكبر اولا

[2] $\cos x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)]$

الاكبر اولا

[3] $\sin \cos x_2 = \frac{1}{2}[\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)]$

زاوية sin اولا

برهان [1] نأخذ الطرف الايمن

الأيمن $= \frac{1}{2}\left(\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 - (\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 - \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2\right)$

$= \frac{1}{2} * 2 \sin x_1 \sin x_2 = \sin x_1 \sin x_2$

برهان [2] + [3] بنفس الاسلوب .

مثال أعد كتابة $\sin 2x \sin 7x$ في صورة جمع او فرق

الحل

① $\sin 2x \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos(5x) - \cos(9x))$

② $\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

③ $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(-2x) + \sin 4x)$

$= \frac{1}{2}(-\sin 2x + \sin 4x)$

④ $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x)$

مفهوم أساسي : متطابقات تحويل المجموع او الفرق إلى ضرب

[1] $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

[2] $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

[3] $\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

[4] $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

برهان [4]

الطرف الايمن $= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$= -2 * \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\right]$

$= -\left[\cos y - \cos x\right]$

$= -\cos y + \cos x = \cos x - \cos y$ ✻

مثال اعد كتابة $\cos(3x) + \cos(x)$ في صورة ضرب

الحل

$\cos 3x + \cos x = 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$= 2 \cos 2x \cos x$

مثال اعد كتابة $\sin 7x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

الحل

$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \sin \frac{7x-3x}{2}$

$= 2 \cos 5x \sin 2x$

H.W

سؤال أعد كتابة ما يلي على صورة ضرب

[1] $\sin 5x + \sin x$ [2] $\cos x + \cos 3x$

مثال اثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 4\cos x - \sec x$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(x+2x)}{\sin x \cos x}$

$$= \frac{\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cos 2x + \cos x (2\sin x \cos x)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x (\cos 2x + 2\cos^2 x)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{4\cos^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = 4\cos x - \sec x$$

✠

مثال برهن ان $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x}$

$$= \frac{2\cos 2x \sin x}{2\cos 2x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

✠

أتحقق صفحة 58

a) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$

الحل

الأيسر $= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$

$= 2\tan x * \cos^2 x$

$= 2\frac{\sin x}{\cos x} * \cos^2 x = 2\sin x \cos x$

$= \sin 2x$

b) اثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

الحل

الأيسر $= \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ✻

أتدرب وأحل المسائل :

أجد قيمة كل من $\cos\frac{\phi}{2}$ ، $\sin\frac{\phi}{2}$ ، $\sin 2\phi$ ، $\cos 2\phi$ للزاوية ϕ بالفترة المعطاة :

(1) $\sin\phi = \frac{5}{13}$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

الحل

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \Rightarrow \frac{25}{169} + \cos^2\phi = 1$$

$$\cos^2\phi = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos\phi = \frac{12}{13}$$

$$\circledast \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = 2 * \frac{5}{13} * \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\circledast \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\circledast \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{2} = \frac{1-\frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26}$$

$$\therefore \sin\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\circledast \cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1+\cos\phi}{2} = \frac{1+\frac{12}{13}}{2} = \frac{25}{26}$$

$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

بما أن $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

$0 < \frac{\phi}{2} < \frac{\pi}{4}$

بالربع الأول

(3) $\tan\phi = \frac{1}{2}$, $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$

الحل

$$\tan\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\phi = 2\sin\phi$$

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \Rightarrow \sin^2\phi + 4\sin^2\phi = 1$

$5\sin^2\phi = 1 \Rightarrow \sin^2\phi = \frac{1}{5}$

$\cos\phi = 2\sin\phi$

$\sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\phi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$
الربع الثالث
$\frac{\pi}{2} < \frac{\phi}{2} < \frac{3\pi}{4}$
الربع الثاني

* $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$
$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$

* $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

* $\sin\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1--\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}$

* $\cos\frac{\phi}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

$\cot\phi = \frac{2}{3}$, $\sin\phi > 0$ [5]

$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\phi = \frac{2}{3}\sin\phi$ الحل

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \Rightarrow \sin^2\phi + \frac{4}{9}\sin^2\phi = 1$

$\frac{13}{9}\sin^2\phi = 1 \Rightarrow \sin^2\phi = \frac{9}{13}$

$\sin\phi = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\phi = \frac{2}{3}\sin\phi = \frac{2}{3} * \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

* $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = 2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$

* $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi = 1 - 2 * \frac{9}{13} = -\frac{5}{13}$

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$$

$$\cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$$

ملحوظة

$\sin\phi > 0$ إذا $\Leftarrow$ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

أو

$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

$\frac{\phi}{2}$ بالربع الأول إذا $\Leftarrow$ $0 < \frac{\phi}{2} < \frac{\pi}{4}$

أو

$0 < \frac{\phi}{2} < \frac{\pi}{2}$

(*) استعمل المتطابقات المثلثية لتقليص القوة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوة الأولى لجيب التمام (cos)

س7 $\sin^4 x$

الحل

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

يمكن صياغة السؤال كما يلي:

اثبت أن:

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

H.W ← $\cos^4 x$ مثال 8

اثبت ان $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

مثال 9: $\cos^4 x \sin^2 x$

الحل

$$\cos^4 x * \sin^2 x = (\cos^2 x)^2 \cdot \sin^2 x$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 * \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(1+\cos 2x)(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(1+\cos 2x)(1-\cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(1+\cos 2x)\sin^2 2x$$

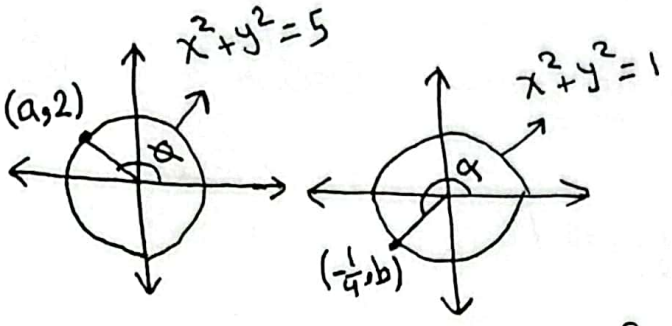
$$= \frac{1}{8}(1+\cos 2x) * \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{16}(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)$$



(*) استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كل من المقدارات الآتية علماً أن:

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=\tan x$

$a^2+2^2=5 \Rightarrow a^2=1$

بالربع الثاني . $\boxed{a=-1}$

$\sin\phi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\phi=\frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{16}+b^2=1$

$b^2=\frac{15}{16} \Rightarrow b=\frac{-\sqrt{15}}{4}$

بالربع الثالث

$\sin\alpha=-\frac{1}{4}$,

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

س13 جد قيمة $g(2\phi)$ ؟؟

الحل

$g(2\phi)=\cos 2\phi$

$=1-2\sin^2\phi$

$=1-2*\frac{4}{5}$

$=-\frac{3}{5}$

س14 جد قيمة $g(\frac{\phi}{2})$ ؟؟

الحل

$g(\frac{\phi}{2})=\cos\frac{\phi}{2}$

$=\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

س15 جد $f(2\alpha)$ ؟؟

الحل

$f(2\alpha)=\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2(-\frac{1}{4})*-\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

س16 أجد $h(\frac{\alpha}{2})$ ؟؟

الحل

$$h(\tfrac{\alpha}{2}) = \tan\tfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

(*) اذا $\beta \sim$

$$L = \frac{10.8}{\sin\phi \cos^2\phi}$$

س23 اثبت ان $L = \dfrac{21.6 \sec\phi}{\sin 2\phi}$

الحل

$$L = \frac{10.8}{\sin\phi\cos\phi} \cdot \frac{1}{\cos\phi}$$

$$L = \frac{10.8}{\frac{1}{2}\sin 2\phi} * \sec\phi = \frac{21.6 \sec\phi}{\sin 2\phi}$$

س24 أجد قيمة L اذا كانت $\phi = 30^\circ$

الحل

$$L = \frac{10.8}{\frac{1}{2} * \frac{3}{4}} = \frac{10.8}{\frac{3}{8}} = \frac{86.4}{3}$$

$$= 28.8$$

⑭ أثبت صحة المطابقات الآتية:

س25: اثبت صحة: $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

الحل ①

$$\cos(10x) = \cos(5x+5x)$$
$$= \cos 5x \cos 5x - \sin 5x \sin 5x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

الحل ②

$$\cos(10x) = \cos 2(5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

س26: اثبت صحة: $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{1}{2}(\sin x * 2\sin x \cos x + 2\cos^3 x)$

$$= \frac{1}{2} * 2\cos x \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \cos x$$

س27: اثبت صحة:

$$\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$$

الحل

$$\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1$$
$$= 2\cos x(\cos x + 1)$$

س28: اثبت صحة: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

الحل

$$\sin 3x = \sin(x+2x)$$
$$= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$$
$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x \cos^2 x$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x)$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x$$
$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

س29: اثبت ان : $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

الحل

$$\tan(3x) = \tan(x + 2x)$$

$$= \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}$$

$$= \frac{\frac{\tan x}{1} + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}{\frac{1 - \tan x * 2\tan x}{1 \quad\quad 1 - \tan^2 x}}$$

$$= \frac{\tan x - \tan^3 x + 2\tan x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

س30: اثبت صحة :

$$\sin x = 4 \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{4}$$

الحل

الطرف الايسر $= 4 \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{4}$

$$= 4 \cos\frac{x}{2} * \frac{1}{2} \sin\frac{x}{2}$$

$$= 2 \cos\frac{x}{2} \sin\frac{x}{2} = \cos x$$

س31: اثبت صحة :-

$$\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$$

الحل

الايسر $= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \tan^2 x$

$$= 2 - \sec^2 x + \tan^2 x = 2 - 1 - \tan^2 x + \tan^2 x$$

$$= 1$$

32 اثبت صحة: $\cos^2(2x) = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

الحل

$$\cos^2(2x) = (\cos 2x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2$$
$$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$$

33 اثبت ان

$$\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$$

الحل

الأيسر $= \dfrac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)} = \dfrac{2}{\tan x + \cot x}$

$$= \frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}}$$

$$= 2 * \frac{\sin x \cos x}{1} = 2\sin x \cos x$$
$$= \sin 2x$$

34 اثبت صحة: $\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

الحل

الطرف الأيسر $= \tan^2 \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ← متطابقة نصف الزاوية

$$= \frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(\cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2}}$$

(معه $\cos\frac{\pi}{2}$، $\sin\frac{\pi}{2} = 1$)

$$= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

س35: اثبت صحة: $\cot^2\frac{x}{2} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

الحل: متطابقة نصف الزاوية

$$\cot^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

لقسمة كل من بسط المقام على $\cos x$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$$

بدائل:

$$\cot^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$$

لقسمة بسط المقام على $\cos x$

$$= \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$$

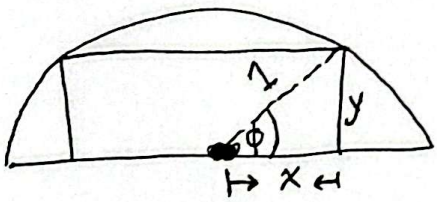
س36: اثبت ان $\ln|\sin x| = \frac{1}{2}\left(\ln|1-\cos 2x| - \ln 2\right)$

الحل

$$\text{الايمن} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x| = 2\cdot\frac{1}{2}\ln|\sin x|$$

$$= \ln|\sin x|$$



مهارات التفكير العليا

(*) الشكل المجاور نصف دائرة نصف قطرها وحدة واحدة

س37: أعبر باقتران بدلالة ϕ عن المساحة A للمستطيل الموضح بالشكل

الحل: $\sin\phi = \frac{y}{1} = y$, $\cos\phi = \frac{x}{1} = x$

$A = 2xy$

$= 2\sin\phi\cos\phi$

$A = \sin 2\phi$

س38: اثبت ان $A = \sin 2\phi$

س39: اثبت ان: $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

الحل

$$\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$$
$$= 1 - 2(2\sin x \cos x)^2$$
$$= 1 - 2 * 4 \sin^2 x \cos^2 x$$
$$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

س40: اثبت ان: $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$

الحل

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

باخذ $\frac{1}{2}$ عامل مشترك داخل الاقواس

$$= \frac{1}{4} * \frac{1}{2}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$
$$= \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$$