الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثانية: المتطابقات و المعادلات المثلثية

الدرس الثالث: حل المعادلات المثلثية

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

5) $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x+\sin x}=\dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$: اثبت صحة

الحل

$$\frac{\sin 10x}{\sin 9x+\sin x}=\frac{2\sin 5x\cos 5x}{2\sin 5x\cos 4x}=\frac{\cos 5x}{\cos 4x}$$

---

6) $\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\tan 2x$

الحل

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{4\sin x\cos x}{\cos 2x}=\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}=2\tan 2x$$

ملاحظة: لحل المعادلات المثلثية

1) طول دورة الجيب (sin) وجيب التمام (cos) هو 2π.

لإيجاد الحل العام (جميع الحلول) نجد الحل في الفترة $[0, 2\pi)$ ثم نضيف $2k\pi$ حيث ان k عدد صحيح.

2) طول دورة الظل (tan) هو π

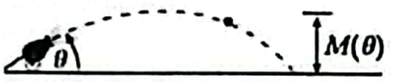
لإيجاد الحل العام (جميع الحلول) نجد الحل في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ثم نضيف $k\pi$ حيث ان k عدد صحيح.

الدرس الثالث: حل المعادلات المثلثية

◆ **مسألة اليوم:**

يُطلق مدفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 قدما لكل ثانية، وزاوية مقدارها (θ)، ويُستعمل الاقتران: $M(\theta)=\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{64}$

لإيجاد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة بالأقدام، إذا افترضت ان $v_0=400\,ft/s$، فأجد قياس الزاوية (θ)، علما بأن أقصى ارتفاع للقذيفة هو $625\,ft$.



الحل

$$M(\theta)=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{64}\Rightarrow\frac{160000\sin^2\theta}{64}=625$$

$$\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

حل المعادلات المثلثية الأساسية

مثال (1)

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $\sin x=\dfrac{1}{2}$

الحل

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

حيث k عدد صحيح.

---

2) $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

الحل

$$x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,,\ x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$$

حيث k عدد صحيح.

أتحقق من فهمي

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \, , \, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

---

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

الحل

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \, , \, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

مثال (2)

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $\cos x = 0.65$

الحل

$\cos x = 0.65 \Rightarrow x = \cos^{-1}(0.65) \approx 0.86$

$x \approx 0.86 + 2k\pi \, , \, x \approx 5.42 + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

---

2) $\tan x = -2$

الحل

$\tan x = -2 \Rightarrow x = \tan^{-1}(-2) \approx -1.11$

$x \approx -1.1 + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

أتحقق من فهمي

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sin x = 0.23$

الحل

$x \approx 0.23 + 2k\pi \, , \, x \approx 2.91 + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

b) $\tan x = -10$

الحل

$x \approx -1.47 + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

حل معادلات مثلثية تحوي اقترانا مثلثيا واحدا

مثال (3)

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$

الحل

$-2\sin x - 2 = -1$

$-2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \, , \, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

---

2) $\tan^2 x - 3 = 0$

الحل

$\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \, , \, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

أتحقق من فهمي

أحلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$

الحل

$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \, , \, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

---

b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

الحل

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin x\cos x = 2\sin x$

الحل

$\Rightarrow \sin x\cos x - 2\sin x = 0$

$\Rightarrow \sin x(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$\Rightarrow \cos x = 2$ (تهمل)

$x = 0, \pi$

حل المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية

مثال (5)

أُحلّ كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0,2\pi)$:

1) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

الحل

$2(1-\sin^2 x) + 3\sin x = 0$

$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$2\sin x + 1 = 0$ or $\sin x - 2 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin x = 2$ ✗ تهمل

$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

2) $\sin 2x - \cos x = 0$

الحل

$2\sin x\cos x - \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ or $2\sin x - 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\quad \sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

أتحقق من فهمي

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0,2\pi)$:

a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

الحل

$\Rightarrow 2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

حل المعادلات المثلثية بالتحليل

مثال (4)

أُحلّ كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0,2\pi)$:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

الحل

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ or $\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad \sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$

2) $\cos x\sin x = 3\cos x$

الحل

$\cos x\sin x - 3\cos x = 0$

$\cos x(\sin x - 3) = 0$

$\cos x = 0$ or $\sin x - 3 = 0$

$\cos x = 0$ $\quad \sin x = 3$

$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

أتحقق من فهمي

أُحلّ كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0,2\pi)$:

a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

الحل

$\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, 1$

$x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -2$ (تهمل)

$x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$

---

b) $2\sin 2x - 3\sin x = 0$

الحل

$\Rightarrow 4\sin x \cos x - 3\sin x = 0$

$\Rightarrow \sin x(4\cos x - 3) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$, $\cos x = \frac{3}{4}$

$x = 0$, $x = \pi$, $x \approx 0.72$, $x \approx 5.56$

مثال (6)

أحلّ للمعادلة: $\cos x + 1 = \sin x$ في الفترة $[0,2\pi)$:

الحل

$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin^2 x$

$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$2\cos x(\cos x + 1) = 0$

$2\cos x = 0$ or $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\quad$ $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\quad$ $x = \pi$

اتحقق من فهمي

أحلّ للمعادلة: $\cos x - \sin x = 1$ في الفترة $[0,2\pi)$

الحل

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow 1 - 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow -2\sin x \cos x = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$, $\cos x = 0$

$x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$

(بقية الحلول لا تحقق المعادلة الأصلية)

حل معادلات مثلثية تحوي المتراتات لضعف الزاوية

مثال (7)

أحلّ للمعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0,2\pi)$.

الحل

$2\cos x \sin x = -1$

$\sin 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$x = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi = \frac{7\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi = \frac{11\pi}{4}$

حلول للمعادلة هي: $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$

اتحقق من فهمي

أحلّ للمعادلة: $2\cos 2x = 1$ في الفترة $[0,2\pi)$.

الحل

$2\cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + (0)\pi = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6} + (1)\pi = \frac{7\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6} + (0)\pi = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6} + (1)\pi = \frac{11\pi}{6}$

حلول للمعادلة هي:

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$

حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية

مثال (8)

أُحلّ المعادلة: $2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$ في الفترة $[0,2\pi)$

الحل

$$2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad \frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi \qquad x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi$$

حلول المعادلة هي: $x=\frac{2\pi}{3}\ ,\ x=\frac{4\pi}{3}$

التحقق من فلاحي

أُحلّ المعادلة: $2\cos\frac{x}{2}-1=0$ في الفترة $[0,2\pi)$.

الحل

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi \qquad x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+4(0)\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$x=\frac{10\pi}{3}+4(0)\pi=\frac{10\pi}{3}\ \times$$

حلول المعادلة هي: $x=\frac{2\pi}{3}\ ,\ x=\frac{10\pi}{3}$ مرفوض

$x=\frac{2\pi}{3}$ مقبول

أتدرّب وأحلّ المسائل

1) أُحلّ كلا من المعادلات الآتية للقيم x جميعها:

1) $2\sin x+3=2$

الحل

$$2\sin x+3=2\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

2) $1-\cos x=\frac{1}{2}$

الحل

$$1-\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

3) $\sin x=-0.3$

الحل

$$x=3.45+2k\pi\ ,\ x=5.98+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

4) $\cos x=0.32$

الحل

$$x=1.25+2k\pi\ ,\ x=5.04+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

5) $\tan x=5$

الحل

$$x=1.37+k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

6) $\sec^2 x-2=0$

الحل

$$\sec^2 x-2=0\Rightarrow\sec^2 x=2$$

$$\Rightarrow\sec x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$
$$\Rightarrow (2\sin x+1)(\sin x-1)=0$$
$$\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2},1$$
$$x=\frac{7\pi}{6},x=\frac{11\pi}{6},x=\frac{\pi}{2}$$

---

11) $3\sin^2 x-7\sin x+2=0$

الحل

$$\Rightarrow (3\sin x-1)(\sin x-2)=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{3}$$
$$x=0.34,x=2.8$$

---

12) $2\cos^2 x+\cos x=0$

الحل

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x+1)=0$$
$$\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2},0$$
$$x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2},x=\frac{2\pi}{3},x=\frac{4\pi}{3}$$

---

13) $\tan^4 x-13\tan^2 x+36=0$

الحل

$$\Rightarrow \left(\tan^2 x-9\right)\left(\tan^2 x-4\right)=0$$
$$\Rightarrow \tan^2 x=4,9\Rightarrow \tan x=\pm 2,\pm 3$$
$$x=1.11,x=2.03,x=4.25,x=5.18$$
$$x=1.25,x=1.89,x=4.39,x=5.03$$

---

14) $\sin x+2\sin x\cos x=0$

الحل

$$\Rightarrow \sin x(1+2\cos x)=0$$
$$\Rightarrow \sin x=0,\ \cos x=-\frac{1}{2}$$
$$x=0,x=\pi,x=\frac{2\pi}{3},x=\frac{4\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$
$$x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

7) $\cot x+1=0$

الحل

$$\cot x=0\Rightarrow \cot x=-1\Rightarrow \tan x=-1$$
$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

8) $\csc^2 x-4=0$

الحل

$$\csc^2 x-4=0\Rightarrow \csc^2 x=4$$
$$\Rightarrow \csc x=\pm 2\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$
$$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

9) $3\sqrt{2}\cos x+2=-1$

الحل

$$3\sqrt{2}\cos x+2=-1\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}\cos x}{3\sqrt{2}}=\frac{-3}{3\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$$

(k) عدد صحيح.

---

2) أحلّ كلا من المعادلات الآتية في الفترة $[0,2\pi)$:

a) $\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x=0$

الحل

$$\Rightarrow 1-\sin^2 x-\sin^2 x+\sin x=0$$
$$\Rightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0$$

15) $\tan^2 x\cos x = \tan^2 x$

الحل

$\Rightarrow \tan^2 x\cos x - \tan^2 x = 0$

$\Rightarrow \tan^2 x(\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \tan x = 0 \ , \ \cos x = 1$

$x = 0 \ , \ x = \pi$

أحلّ كلا من المعادلات الآتية في الفترة $[0,2\pi)$:

16) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

الحل

$\Rightarrow 2(1-\sin^2 x) + \sin x = 1$

$\Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \ , \ \sin x = 1$

$x = \frac{7\pi}{6} \ , x = \frac{11\pi}{6} \ , x = \frac{\pi}{2}$

---

17) $\tan^2 x - 2\sec x = 2$

الحل

$\Rightarrow \tan^2 x - 2\sec x - 2 = 0$

$\Rightarrow \sec^2 x - 1 - 2\sec x - 2 = 0$

$\Rightarrow \sec^2 x - 2\sec x - 3 = 0$

$\Rightarrow (\sec x - 3)(\sec x + 1) = 0$

$\Rightarrow \sec x = 3 \ , \ \sec x = -1$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{3} \ , \ \cos x = -1$

$x = \pi \ , \ x = 1.23 \ , \ x = 5.05$

---

18) $\csc^2 x = \cot x + 3$

الحل

$\Rightarrow \csc^2 x - \cot x - 3 = 0$

$\Rightarrow \cot^2 x + 1 - \cot x - 3 = 0$

$\Rightarrow \cot^2 x - \cot x - 2 = 0$

$\Rightarrow (\cot x - 2)(\cot x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cot x = 2 \ , \ \cot x = -1$

$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \ , \ \tan x = -1$

$x = 0.46 \ , x = 3.61 \ , x = \frac{3\pi}{4} \ , x = \frac{7\pi}{4}$

---

19) $\sin 2x = 3\cos 2x$

الحل

$\sin 2x = 3\cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 3$

$2x = 1.25 \ , \ 2x = 4.39$

$2x = 7.53 \ , \ 2x = 10.67$

$x = 0.62 \ , x = 2.2 \ , x = 3.77 \ , x = 5.34$

---

20) $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

الحل

$4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$2\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \ , \ \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} , x = \frac{5\pi}{6} , x = \frac{2\pi}{3} , x = \frac{4\pi}{3}$

عندما يدور القمر حول الأرض ، فإنّ الجانب المواجه للأرض يكون في الغالب مضاء جزئيا بواسطة الشمس ، نُصف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه ، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقة : $F = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ ،

حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $(0° \le \theta \le 360°)$ ، أجد قياس الزاوية θ لكل طور مما يأتي :

21) القمر الجديد $(F = 0)$.

الحل

$F = \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \ , \ 0° \le \theta \le 360°$

$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(1-\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0°$

22) الهلال $(F=0.25)$.

الحل

$$F=0.25\Rightarrow\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=0.25$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ\ ,\ \theta=300^\circ$$

---

23) القمر المكتمل $(F=1)$.

الحل

$$F=1\Rightarrow\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=1$$

$$\Rightarrow\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=180^\circ$$

---

24) تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة $y=4e^{-3t}\sin 2\pi t$ ، ما الأوقات (قيم t) التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y=0)$ ؟

الحل

$$y=4e^{-3t}\sin 2\pi t$$

$$y=0\Rightarrow 4e^{-3t}\sin 2\pi t=0\Rightarrow\sin 2\pi t=0$$

$$\Rightarrow 2\pi t=0+2k\pi\ ,\ 2\pi t=\pi+2k\pi$$

$$t=k\ ,\ t=\frac{1}{2}+k$$

(k) عدد صحيح.

أحلّ كلا من المعادلات الآتية في الفترة $[0,2\pi)$:

25) $\sin 2x+\cos x=0$

الحل

$$\sin 2x+\cos x=0\Rightarrow 2\sin x\cos x=0$$

$$\Rightarrow\cos\theta(2\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow\cos x=0\ ,\ \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\frac{3\pi}{2}\ ,\ x=\frac{7\pi}{6}\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}$$

26) $\tan\frac{x}{2}-\sin x=0$

الحل

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos^2\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=0\ ,\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=0\ ,\ \cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{2}=0\ ,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\frac{3\pi}{2}$$

---

27) $2\sin^2 x=2+\cos 2x$

الحل

$$\Rightarrow 2\sin^2 x=2+1-2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 x-3=0\Rightarrow\sin^2 x=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}\ ,\ x=\frac{7\pi}{6}\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}$$

---

28) $2\sin^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=0$

الحل

$$\Rightarrow 2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)-3\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow -2\cos^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}+2=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}-2=0$$

$$\Rightarrow\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{x}{2}+2\right)=0$$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}, \cos\frac{x}{2}=-2$ (تُهمل)

$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

---

29) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

الحل

$\Rightarrow \sin x=\sqrt{3}\cos x \Rightarrow \tan x=\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}$

---

30) $\cos 2x=\cos x$

الحل

$\cos 2x=\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x-1=\cos x$

$\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$\Rightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}, \cos x=1$

$\Rightarrow x=0, x=\frac{2\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}$

مهارات التفكير العليا

* إذا كان: $\tan x+\frac{k}{\tan x}=2$، حيث (k) ثابت،

فأجيب عما يأتي:

أ) اثبت عدم وجود حل للمعادلة عندما $k>1$، ثم ابرر إجابتي.

الحل

$\tan x+\frac{k}{\tan x}=2$

$\tan^2 x+k=2\tan x$

$\tan^2 x-2\tan x+k=0$

$\Delta=b^2-4ac=4-4k$

$\Delta<0 \Rightarrow 4-4k<0 \Rightarrow k>1$

إذا كان $k>1$، فإن المميز يكون سالبا، والمعادلة لا حل لها.

32) احل المعادلة عندما $k=-8$، حيث: $-\pi<x<\pi$، ثم ابرر خطوات الحل.

الحل

$\tan^2 x-2\tan x-8=0$

$(\tan x-4)(\tan x+2)=0$

$\tan x=4 \ , \ \tan x=-2$

$x=1.33, x=-1.82, x=-1.11, x=2.03$

---

33) أجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة:

$\sin(\cos x)=0$، ثم ابرر إجابتي.

الحل

$\sin(\cos x)=0$

$\Rightarrow \cos x=..,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,...$

لكن لا يوجد حل للمعادلة $\cos x=..,-2\pi,-\pi,\pi,2\pi,..$

لأن $-1\le\cos x\le 1$

$\Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

---

34) احل المعادلة: $\tan x+\cot x=5$، حيث:

$0\le x<2\pi$

الحل

$\tan x+\cot x=5 \Rightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}-5=0$

$\tan^2 x-5\tan x+1=0 \Rightarrow \tan x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=1.37, x=4.51, x=0.21, x=3.35$