الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة: التفاضل

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

قواعد الاشتقاق (مراجعة)

قاعدة 1 اذا كان $f(x)=c$ حيث c ثابت

فإن $f'(x)=0$ ، مشتقة الثابت = صفر

مثال اوجد المشتقة الأولى فيما يلي

1. $f(x)=\sqrt{5} \Rightarrow f'(x)=0$
2. $y=-2 \Rightarrow y'=0$
3. $y=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$
4. $h(x)=0 \Rightarrow h'(x)=0$
5. $f(x)=\pi \Rightarrow f'(x)=0$
6. $g(x)=\pi e \Rightarrow g'(x)=0$

قاعدة 2 اذا كان $f(x)=ax$ فإن $f'(x)=a$

مثال اوجد المشتقة فيما يلي:

1. $f(x)=3x \Rightarrow f'(x)=3$
2. $y=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$
3. $y=\frac{x}{5} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}$
4. $g(x)=-x \Rightarrow g'(x)=-1$

قاعدة 3 اذا كان $f(x)=x^n$ فإن $f'(x)=n\,x^{n-1}$

قاعدة 4 اذا كان $f(x)=ax^n$ فإن $f'(x)=a\cdot n\,x^{n-1}$

مثال اذا كان $f(x)=2x^3$ اوجد $f'(x)$ ثم $f'(3)$

الحل

$$f'(x)=2(3)x^{3-1}=6x^2$$

$$f'(3)=6(3)^2=6(3)^2=6(9)=54$$

مثال اذا كان $f(x)=x^4$ جد $f'(x)$ ، $f'(2)$ ، $(f(2))'$

الحل

$$f'(x)=4x^{4-1}=4x^3$$

$$f'(2)=4(2)^3=4(8)=32$$

$$(f(2))'=0$$

($f(2)$ ثابت)

ملاحظة: $f(a)$ = ثابت

$(f(a))' = 0$ ⇐ مشتقة الثابت = صفر.

لإيجاد $f'(a)$ نشتق ثم نعوض $x=a$

مثال: $f(x)=\frac{x^6}{2}$ جد $f'(1)$ ثم جد $(f(1))'$

الحل

$$f'(x) = \frac{6x^{6-1}}{2} = 3x^5$$

$$f'(1) = 3(1)^5 = 3 \quad , \quad \underbrace{(f(1))'}_{\text{ثابت}} = \text{صفر}$$

مثال اذا كان $f(x)=\frac{-3}{x^7}$ جد $f'(x)$ ، $f'(-1)$

الحل

$$f(x) = -3x^{-7} \Rightarrow f'(x) = 21x^{-8}$$

$$f'(x) = \frac{21}{x^8} \Rightarrow f'(-1) = 21$$

ملاحظة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ قاعدة تحويل الجذر إلى أسس كسر

① $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ② $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ③ $\sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$

مثال اذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x}$ جد $f'(x)$ ثم $f'(8)$

الحل

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3*(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{3(2)^2}$$

$$= \frac{1}{12}$$

مثال اذا كان $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ جد $f'(4)$ و $(f(4))'$

الحل

$$f(x)=\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=2*-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f'(4)=\frac{-1}{\sqrt{4^3}}=\frac{-1}{2^3}=\frac{-1}{8}$$

$(f(4))'=$ صفر

قاعدة المشتقة تتوزع على الجمع والطرح.

اذا كان $y=f(x)\mp g(x)\mp h(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\mp g'(x)\mp h'(x)$$

مثال اذا كان $f(x)=3x-x^2+5$ جد $f'(2)$ و $(f(5))'$

الحل

$$f'(x)=3-2x$$

$$f'(2)=3-2(2)=3-4=-1$$

$$(f(5))'=0$$

مثال اذا كان $y=\frac{7}{x^3}+\frac{3}{x}-2$ جد y'

الحل

$$y=7x^{-3}+3x^{-1}-2$$

$$y'=-21x^{-4}-3x^{-2}-0$$

$$y'=\frac{-21}{x^4}-\frac{3}{x^2}$$

مثال: $f(x)=\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+5$ جد $f'(x)$ ، $f'(1)$

الحل

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{3}}+5$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{2}{3}}+0$$

$$f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$$

قاعدة خاصة للجذر التربيعي

اذا كان $y=\sqrt{f(x)}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

" مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 * \text{الجذر نفسه}}$

مثال اذا كان $f(x)=\sqrt{3x+10}$

اوجد $f'(2)$

الحل

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+10}}$$

$$f'(2)=\frac{3}{2\sqrt{6+10}}=\frac{3}{2(4)}=\frac{3}{8}$$

مثال اذا كان $f(x)=5x-\sqrt{2x^2-7}$ جد $f'(2)$

الحل

$$f'(x)=5-\frac{2\cancel{4}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-7}}$$

$$f'(2)=5-\frac{4}{\sqrt{1}}=5-4=1$$

مثال $f(x)=x^2(x^3+5x)$ جد $f'(x)$

الحل

$$f(x)=x^2(x^3+5x)=x^5+5x^3$$

$$f'(x)=5x^4+15x^2$$

قاعدة سلسلة القوة

إذا كان $y=(f(x))^n$ فإن $\frac{dy}{dx}=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$

مثال إذا كان $f(x)=(5-2x^3+x)^5$ جد $f'(1)$

الحل

$$f'(x)=5(5-2x^3+x)^4(-6x^2+1)$$

$$f'(1)=5(5-2+1)^4(-6+1)$$

$$=5(4)^4(-5)=-20(64)$$

$$=-1280$$

مثال إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^5}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f(x)=(x+1)^{\frac{5}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(1)$$

$$=\frac{5}{3}\sqrt[3]{(x+1)^2}$$

مثال إذا كان $y=g^3(x)$ فإن $g'(2)=-1$ ، $g(2)=3$ جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=2$

الحل

$$y=(g(x))^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=3(g(x))^2\cdot g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}=3(g(2))^2\cdot g'(2)$$

$$=3*3^2*-1=-27$$

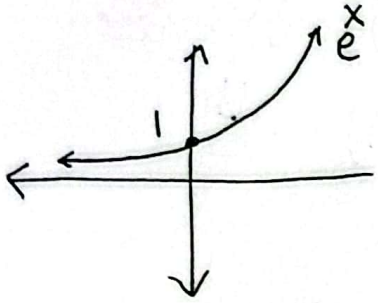
الدرس الأول : مشتقة اقترانات خاصة !!

الاقتران الأسي الطبيعي هو $f(x)=e^x$ حيث

e يسمى الأساس الطبيعي (العدد النيبري)

$$e \approx 2.7$$

* الاقتران الأسي $f(x)=e^x$ مجاله R ومداه R^+



e^x ، $e^x \neq 0$ ، $e^x > 0$ $\Leftarrow$

نظرية اذا كان $f(x)=e^x$

فأن $f'(x)=e^x$

مثال أوجد $f'(x)$ ، $f'(0)$. $f(x)=-3e^x$

الحل $f'(x)=-3e^x \Leftarrow f'(0)=-3e^0=-3$

مثال اذا كان $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+xe^x}{2x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2x}+\frac{xe^x}{2x}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}e^x$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{2}e^x$$

مثال اذا كان $y=x^3-5e^3+2$ جد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-0+0=3x^2$

مثال اذا $f(x)=\sqrt{x}+3e^x$ أوجد $f'(x)$ ، $f'(1)$.

الحل

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+3e^x$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}+3e$$

مثال $y=8e^x+\frac{4}{\sqrt[5]{x}}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$y=8e^x+\frac{4}{x^{\frac{1}{5}}} \Rightarrow y=8e^x+4x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=8e^x-\frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}}=8e^x-\frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

مثال اذا $f(x)=e^{x+2}$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f(x)=e^x\cdot e^2 \Rightarrow f(x)=e^2e^x$$

$$f'(x)=e^2e^x=e^{x+2}$$

مراجعه: قوانين اللوغاريتمات

[1] $\log_b 1=0$ $\quad$ [2] $\log_b b=1$ $\quad$ [3] $\log_b b^n=n$

$\boxed{\ln 1=0}$ $\quad$ $\boxed{\ln e=1}$ $\quad$ $\boxed{\ln e^n=n}$

أمثلة

① $\ln e^3=3$ $\quad$ ② $\log_5 5=1$

③ $\log_2 2^5=5$ $\quad$ ④ $\log 10=1$ $\quad$ ⑤ $\log 10^3=3$

[4] $\log_b(x\cdot y)=\log_b x+\log_b y$ قانون الضرب

أمثلة

① $\ln(x^3\cdot y^2)=\ln x^3+\ln y^2$

② $\log_3(3x)=\log_3 3+\log_3 x=1+\log_3 x$

5 $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ (قانون القسمة)

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

6 $\log_b x^n = n \log_b x$ قانون القوة

$\ln x^n = n \ln x$

أمثلة

① $\ln\left(\frac{x+1}{2x+3}\right) = \ln(x+1) - \ln(2x+3)$

② $\ln\sqrt{x+5} = \ln(x+5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x+5)$

7 $e^{\ln x} = x \Rightarrow a^{\log_a x} = x$

أمثلة

① $e^{\ln(x+3)} = x+3$ ② $5^{\log_5 x} = x$

③ $e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$$\ln x = y \iff x = e^y$$

$$\log_b x = y \iff x = b^y$$

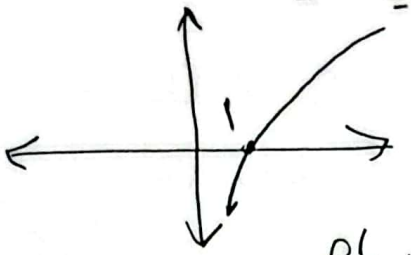
الصيغة اللوغاريتمية ↓ الصيغة الأسية ↓

① $y = \log(x+3) \Rightarrow x+3 = 10^y$

② $y = \ln(2x-1) \Rightarrow 2x-1 = e^y$

③ $y = \log_3(x^2-5) \Rightarrow x^2-5 = 3^y$

* الصوره العامة للاقتران اللوغاريتمي الطبيعي هي $f(x)=\ln x$ مجالة R^+ ومداه R



نظرية مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

اذا كان $f(x)=\ln x$ فأن $f'(x)=\frac{1}{x}$

ملاحظه استخدم قوانين اللوغاريتمات قبل الاشتقاق ثم اشتق.

مثال جد $f'(x)$ ، $f'(2)$ ، $(f(3))'$ حيث $f(x)=\ln x^3$

الحل

$$f(x)=3\ln x \Rightarrow f'(x)=3*\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

$$f'(2)=\frac{3}{2} \quad , \quad (f(3))'=0$$

ملاحظه $(f(3))'$ ثابت.

مثال جد $f'(x)$ حيث $f(x)=\sqrt{x}+\ln(4x)$

الحل

$$f(x)=\sqrt{x}+\ln 4+\ln x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+0+\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$$

مثال جد $f'(x)$ حيث $f(x)=e^{\ln x}+\ln(2x^3)$

الحل

$$f(x)=x+\ln 2+\ln x^3$$

$$f(x)=x+\ln 2+3\ln x$$

$$f'(x)=1+0+3*\frac{1}{x}=1+\frac{3}{x}$$

مثال اذا كان $f(x)=(\ln x)^5$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x)=5(\ln x)^4\cdot\frac{1}{x}$$

تعريف مشتقة اقتران الجيب واقتران جيب التمام .

1 اذا $f(x) = \sin x$ فإن $f'(x) = \cos x$

2 اذا $f(x) = \cos x$ فإن $f'(x) = -\sin x$

مثال اذا $f(x) = 2\sin x - 5\cos x$ اوجد $f'(x)$
ثم أوجد $f'(\frac{\pi}{4})$

الحل

$$f'(x) = 2\cos x + 5\sin x$$

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = 2\cos\tfrac{\pi}{4} + 5\sin\tfrac{\pi}{4}$$

$$= 2 * \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+5}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

مثال اذا $f(x) = \sqrt{1-2\sin x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{0 - 2\cos x}{2 * \sqrt{1-2\sin x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}$$

مثال اذا $f(x) = \cos x + \sin\frac{\pi}{12} + \ln(\frac{x}{2})$ جد $f'(x)$

الحل

$$f(x) = \cos x + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{12}}_{\text{ثابت}} + \ln x - \underbrace{\ln 2}_{\text{ثابت}}$$

$$f'(x) = -\sin x + 0 + \frac{1}{x} - 0$$

$$f'(x) = -\sin x + \frac{1}{x}$$

مثال $f(x) = (\sin x + \cos x)^5$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = 5(\sin x + \cos x)^4 (\cos x - \sin x)$$

تعريف ميل المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هو $f'(x_1)$ ← ميل المماس عند نقطة هو المشتقة عند نقطة التماس.

مثال جد ميل المماس لمنحنى $f(x) = x^2 + 3$ عند النقطة $(2, 7)$

الحل

$$f'(x) = 2x$$

ميل المماس $\rightarrow$ $m = f'(2) = 2(2) = 4$

مثال اذا كان $f(x) = 5x + e^x$ جد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = 0$.

الحل

$$f'(x) = 5 + e^x \Rightarrow m = f'(0) = 5 + e^0$$
$$m = 5 + 1 = 6$$

تعريف معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هي:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

فقط.

مثال اوجد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = (3x+2)^2$ عند $(-1, 1)$

الحل

x_1 y_1

$(-1, 1)$

$$f'(x) = 2(3x+2)^1(3)$$
$$f'(x) = 6(3x+2) \Rightarrow m = f'(-1)$$
$$m = 6(-3+2) = -6$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -6(x - -1)$$
$$y = -6x - 6 + 1$$
$$y = -6x - 5$$

ملاحظة يتعامد مستقيمان اذا كان حاصل ضربهما (-1)

$$\text{ميل المماس} * \text{ميل العمودي} = -1$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{f'(x_1)}$$

مثال اذا كان $f(x) = x^7 - x$ ① اوجد معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(1,0)$ ② معادلة العمودي على المماس عند $(1,0)$

الحل

$$f'(x) = 7x^6 - 1 \Leftarrow$$

$$m_{\text{المماس}} = f'(1) = 7 - 1 = 6$$

$$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{6}$$

x_1 y_1
$(1,0)$

① معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 6(x - 1)$$
$$y = 6x - 6$$

② معادلة العمودي

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$
$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

مثال جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ عند النقطة $(1,-1)$

الحل

$$f(x) = \ln x - \ln e = \ln x - 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 0 \Rightarrow m = f'(1) = 1$$

معادلة المماس

$$y - -1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2$$

معادلة العمودي

$$y - -1 = \frac{-1}{1}(x - 1)$$
$$y = -x$$

اتحقق من فهمي ص 85 إذا كان $f(x)=\ln\sqrt{x}$ أوجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند $x=e$

الحل

$$f(x)=\ln x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln x$$

نجد نقطة التماس أولاً

$$f(e)=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2} \Rightarrow (e,\tfrac{1}{2})$$ نقطة التماس

$$f'(x)=\frac{1}{2}*\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$$

$$m_{\text{المماس}}=f'(e)=\frac{1}{2e} \Rightarrow m_{\text{العمودي}}=\frac{-1}{\frac{1}{2e}}=-2e$$

معادلة المماس

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$$

$$y=\frac{1}{2e}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2e}x$$

معادلة العمودي:

$$y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$$

$$y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$$

ملاحظات

1) يكون المماس أفقياً (موازي للمحور x) عندما يكون الميل = صفر ($f'(x)=0$)

2) المقطع x للاقتران $y=f(x)$ هو عندما $y=0$

المقطع y للاقتران $y=f(x)$ هو عندما $x=0$

3) المستقيمان متوازيان $\Leftrightarrow$ ميلاهما متساويان.

(*) ص 90 الكتاب

إذا كان $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}e^x$ أجب عن س 7، س 8

س 7: أجد معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند $(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi})$

س 8: أجد معادلة المماس العمودي على منحنى $f(x)$ عند $(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi})$

الحل

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$m_{\text{المماس}} = f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^{\pi} = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$

$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}} = \frac{-1}{\frac{-2+e^{\pi}}{2}} = \frac{-2}{-2+e^{\pi}}$

س7: معادلة المماس

$(\underset{x_1}{\pi}, \underset{y_1}{\frac{1}{2}e^{\pi}})$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (-1+\frac{1}{2}e^{\pi})(x-\pi)$

$y = (-1+\frac{1}{2}e^{\pi})(x-\pi) + \frac{1}{2}e^{\pi}$

س8: معادلة العمودي

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{-2}{-2+e^{\pi}}(x-\pi)$$

$$y = \frac{-2}{-2+e^{\pi}}(x-\pi) + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

س9 ص90 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى $f(x) = e^x - 2x$.

الحل

$m_{\text{المماس}} = f'(x) = e^x - 2 = 0$

$e^x = 2$ بأخذ Ln للطرفين

$\ln e^x = \ln 2$

$x = \ln 2$

س10 ص 90 الكتاب : أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$

a) $y = -x + \pi - 1$ (b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

الحل $x_1 \quad y_1$

$f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + -1 \Rightarrow (\pi, -1)$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$m = \cos\pi - \sin\pi = -1 \Rightarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{-1} = 1$

معادلة العمودي هي :

$y - -1 = 1(x - \pi)$

$y = x - \pi - 1$

(*) ص 90 اذا كان الاقتران : $f(x) = \ln x$ اجب عن السؤالين

س12: اثبت ان مماس منحنى الاقتران عند (e ، 1) يمر بنقطة الأصل

الحل $x_1 \quad y_1$

$f'(x) = \frac{1}{x} = \quad (e, 1)$

$m = f'(e) = \frac{1}{e}$ ،

معادلة المماس :

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$

$y = \frac{1}{e}x - 1 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$

نعوض نقطة الأصل $(0,0) \Leftarrow$

$0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{e}(0)$

$0 = 0$ ✓

∴ المماس يمر بنقطة الاصل

س13: اثبت ان المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة (e ، 1) هو $e + \frac{1}{e}$

الحل معادلة العمودي :

$y - 1 = -e(x - e)$

$y = -ex + e^2 + 1$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\frac{1}{e}}$

ميل العمودي $= -e$

المقطع x هو ايجاد قيمة x عندما $y=0$

$$0 = -ex + e^2 + 1 \Rightarrow \frac{ex}{e} = \frac{e^2}{e} + \frac{1}{e}$$

$$x = e + \frac{1}{e} \quad **$$

⊛ الحركة في مسار مستقيم

- موقع الجسم $= s(t)$ حيث t : الزمن
- سرعة الجسم $= v(t)$

تعريف: $v(t) = s'(t)$ ← السرعة المتجهة هي مشتقة اقتران الموقع

- تسارع الجسم: $a(t)$ هو معدل تغير سرعة الجسم بالنسبة للزمن.

$$a(t) = v'(t) \Leftarrow a(t) = s''(t)$$

- السرعة القياسية هي $|v(t)|$.

ملاحظات: ① السرعة الابتدائية للجسم $= v(0)$

② الموقع الابتدائي للجسم $= s(0)$

③ يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $v(t) = 0$

④ اذا كانت $v(t)$ موجبة ← الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب

اذا كانت $v(t)$ سالبة ← الجسم يتحرك بالاتجاه السالب

⑤ يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قيماً موجبة او سالبة او صفر. وكذلك السرعة المتجهة والتسارع.

⑥ الزمن لا يكون سالب

⑦ يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $s(t) = s(0)$

مثال يمثل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني .

① اوجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=2$

② جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

③ في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=5$

④ متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي .

الحل

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$
$$a(t) = v'(t) = 12 - 6t$$

①
$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$
$$= 24 - 12 = 12 \text{ m/s}$$
$$a(2) = 12 - 6(2) = 0 \text{ m/s}^2$$

②
السكون اللحظي عندما $v=0$ ← $v(t) = 0$
$$12t - 3t^2 = 0$$
$$3t(4-t) = 0$$
$$t = 0 \text{ , } t = 4$$

③
$$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$$
$$= 60 - 75 = -15 \text{ m/s}$$
يسير الجسم باتجاه السالب عندما $t = 5$

④ يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $v(t) = v(0)$
$$6t^2 - t^3 = 0$$
$$t^2(6-t) = 0$$
$$t \neq 0 \text{ , } \boxed{t = 6}$$
يعود الجسم إلى الموقع الابتدائي عند $t=6$

أتحقق من فهمي يمثل الاقتران $s(t)=t^2-7t+8$, $t\geq 0$

حيث s = الموقع ، t : بالزمن.

a) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=4$

b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

c) في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=2$

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي.

الحل

$$v(t)=s'(t)=2t-7 \quad , \quad a(t)=v'(t)=2$$

(a)

$$v(4)=2(4)-7=1 \text{ m/s}$$

$$a(4)=2 \text{ m/s}^2$$

(b) يسكن الجسم عندما $v(t)=0$

$$2t-7=0 \Rightarrow 2t=7$$

$$t=\frac{7}{2} \text{ s}$$

(c)

$$v(2)=2(2)-7=-3 \text{ m/s}$$

يتحرك الجسم بالاتجاه السالب عندما $t=2$

(d) يعود الجسم إلى الموقع الابتدائي عندما

$$v(t)=v(0)$$

$$t^2-7t+8=0-7(0)+8$$

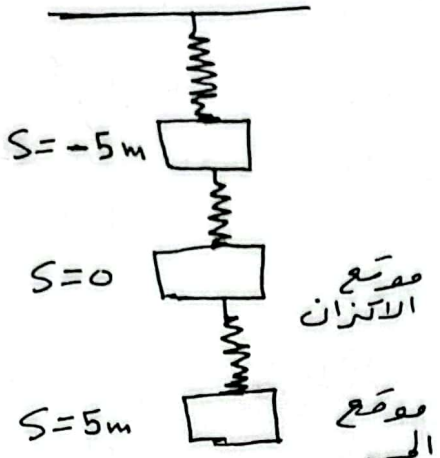
$$t^2-7t+8=8 \Rightarrow t^2-7t=0$$

$$t(t-7)=0$$

$$t=7 \quad , \quad t\neq 0$$

يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t=7$

الحركة التوافقية البسيطة :



مثال يمثل الجسم المجاور جسم معلق بزنبرك شُدَّ 5 وحدات أسفل موقع الاتزان $S=0$ ثم تُرك عند الزمن $t=0$ ليتحرك للأعلى وللأسفل ويمثل اقتران: $S(t)=5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق حيث t: الزمن بالثواني ، S: الموقع بالسنتيمترات

① أجد اقتران يمثل سرعة الجسم واقتران آخر يمثل تسارعه

الحل

$$V(t)=S'(t)=-5\sin t$$
$$a(t)=V'(t)=-5\cos t$$

② صف حركة الجسم .

الحل - موقع الجسم يتراوح بين $S=5$ أسفل نقطة الاتزان $S=-5$ cm فوق نقطة الاتزان .

- سرعة الجسم القياسية اكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان .
- تسارع الجسم يكون معكوس موقع الجسم .
- التسارع = صفراً عند موقع الاتزان لأن قوة الزنبرك و قوة الجاذبية تلغي بعضها البعض .

(*) ص 91 الكتاب يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى والى الأسفل ويمثل الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موضع الجسم عند اي زمن لاحق.

20) أجد اقتران السرعة واقتران التسارع.

الحل

$$v(t) = s'(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = v'(t) = -4\cos t$$

21) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$

الحل

$$v(\tfrac{\pi}{4}) = -4\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\ m/s$$

$$a(\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\ m/s^2$$

22) أصف حركة الجسم ؟؟

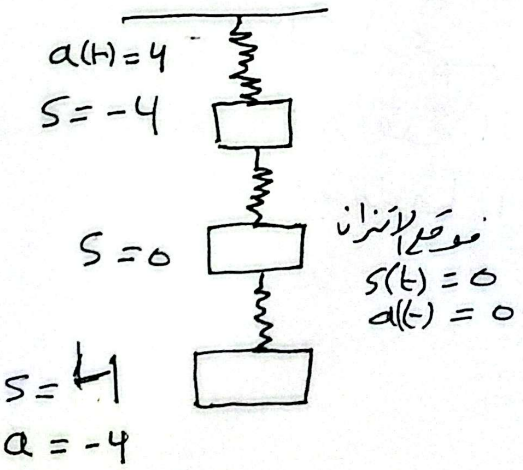
1- موضع الجسم يتراوح بين $s=4$, $s=-4$

2- سرعة الجسم العظمى اكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموضع الاتزان.

3- التسارع عكس الموضع.

4- التسارع = صفر عند موضع الاتزان

قوة الزنبرك وقوة الجاذبية تلغي كل منهما الاخر



السؤال 11 ص 91 الكتاب المدرسي

اذا $f(x)=\ln(kx)$ فأثبت ان $f'(x)=\frac{1}{x}$ ، $x>0$ ، $k\in R$

الحل

$$f(x)=\ln k+\ln x$$
$$f'(x)=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

(14) ص 91 الكتاب

يمثل الاقتران: $S(t)=t^3-4t^2+5t$ ، $t\geq 0$ وضع جسم يتحرك في مسار مستقيم، s: الموقع بالامتار، t: الزمن بالثوان

السؤال 14: أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=5$

الحل

$$V(t)=S'(t)=3t^2-8t+5\ ,\ a(t)=6t-8$$
$$V(5)=3(5)^2-8(5)+5=75-40+5=40\ m/s$$
$$a(5)=6(5)-8=30-8=22\ m/s^2$$

السؤال 15 أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

الحل

$$V(t)=0\Rightarrow 3t^2-8t+5=0$$
$$(t-1)(3t-5)=0$$
$$t=1\ ,\ t=\frac{5}{3}$$

السؤال 16: في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=4$ ؟!

الحل

$$V(4)=3(4)^2-8(4)+5=48-32+5$$
$$=21\ m/s$$

بما ان السرعة موجبة ⇐ الجسم يتحرك باتجاه الموجب عند $t=4$

السؤال 17: متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي ؟؟

$$V(t)=V(0)$$
$$t^3-4t^2+5t=0\Rightarrow t(t^2-4t+5)=0$$

لا تحلل ← مميزها سالب

$t=0$ فقط

∴ لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

21

(*) ص 91 الكتاب

يمثل الاقتران $S(t) = e^t - 4t$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

س18 أجد الموقع الابتدائي للجسم.

الحل

الموقع الابتدائي $= S(0) = e^0 - 4(0) = 1$

س19 أجد سرعة الجسم عندما تكون سرعته صفراً.

الحل

$$V(t) = S'(t) = e^t - 4 = 0$$

$$e^t = 4 \Rightarrow \ln e^t = \ln 4$$

$$\boxed{t = \ln 4}$$

$$a(t) = V'(t) = e^t$$

$$a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4 \ m/s^2$$

(*) مهارات التفكير العليا ص 92 الكتاب.

س23 اذا قطع الاقتران $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي المحور y عند نقطة التقاطع للاقتران مع المحور y أجد معادلة المماس

الحل تقاطع المحور $y \Leftarrow x = 0$

$$y(0) = e^0 - a(0) = 1 \Rightarrow (0, 1) \quad (x_1, y_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - a \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = e^0 - a = \boxed{1 - a}$$

معادلة المماس

$$y - 1 = (1-a)(x-0)$$

$$y = x - ax + 1$$

س24 أثبت عدم وجود مماس ميله (2) للاقتران

$$y = 2e^x + 3x + 5x^3$$

الحل $\Leftarrow y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

$2e^x > 0$, $15x^2 > 0$ $\Leftarrow$ لجميع قيم x

$$2e^x + 15x^2 > 0 \Rightarrow 2e^x + 15x^2 + 3 > 3$$

$\therefore$ لا يوجد مماس ميله (2).

(*) ص 92 الكتاب

اذا كان الاقتران $y=ke^x$ حيث $k>0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P فأجيب عن الأسئلة تباعاً

25) أجد تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور X ؟.

الحل P = نقطة التماس = تقاطع y مع المحور y .

$$y(0)=ke^0=k \Rightarrow P(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{k})$$

$$y'=ke^x \Rightarrow m=y'(0)=ke^0=k$$

المماس هو

$$y-k=k(x-0)$$

$$y=kx+k$$

تقاطع المماس مع المحور y $\Leftarrow$

$$kx+k=0$$

$$kx=-k \Rightarrow \boxed{x=-1} \Rightarrow \text{تقاطع المحور } X = (-1,0)$$

26) اذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100,0)$ أجد قيمة k .

الحل $P(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{k})$ ، $m=k \Leftarrow$ ميل العمودي $=\frac{-1}{k}$

معادلة العمودي

$$y-k=\frac{-1}{k}(x-0)$$

العمودي يمر بالنقطة $(\overset{x}{100},\overset{y}{0})$

$$y=\frac{-1}{k}x+k$$

$$0=\frac{-100}{k}+k$$

$$\frac{k}{1}=\frac{100}{k} \Rightarrow k^2=100$$

$$k=\sqrt{100}=10$$

$k>0$ فقط $\leftarrow$ $k=+10$

(*) ص 92 اذا $y=\log x$ فـ $\frac{dy}{dx}$ = ؟ أجيب عن السؤالين تباعاً.

س 27: أثبت ان: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln 10}$ صفحة 1

الحل

$y=\log_{10} x=\frac{\ln x}{\ln 10}$

$y'=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln 10}$

مراجعة حفظ

$\log_k x=\frac{\ln x}{\ln k}$

$\log_3 x=\frac{\ln x}{\ln 3}$

س 28 اعتماداً على النتيجة سؤال السابق أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y=\log a x^2$ حيث a عدد حقيقي موجب.

الحل

اعتماد على النتيجة

$y=\log a+\log x^2$

$y=\log a+2\log x$

$y'=0+2\frac{1}{x\ln 10}$

$y=\log a+2\cdot\frac{\ln x}{\ln 10}$

$y=\log a+\frac{2}{\ln 10}\cdot\ln x$

$y'=0+\frac{2}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$

$y'=\frac{2}{x\ln 10}$

مثال اذا $y=\log_5 x$ فـ $\frac{dy}{dx}$ = ؟

الحل

$y=\frac{\ln x}{\ln 5}=\frac{1}{\ln 5}\cdot\ln x$

$y'=\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln 5}$

مثال $y=\log_2 3x^5$ فـ y' = ؟

الحل

$y=\log_2 3+5\log_2 x=\log_2+5\frac{\ln x}{\ln 2}$

$y'=0+\frac{5}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{x\ln 2}$

(*) ص 92 يمثل الاقتران $s(t) = 4 - \sin t$, $t \geq 0$ موضع جسم

29) اجد سرعة الجسم وتسارعه بعد t ثانية.

الحل

$$v(t) = s'(t) = -\cos t$$
$$a(t) = v'(t) = \sin t$$

30) أجد موضع الجسم عندما β في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

الحل

$$v = 0 \Rightarrow -\cos t = 0$$
$$t = \boxed{\frac{\pi}{2}}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$
اول مرة

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3m$$

31) أجد موضع الجسم عندما يكون تسارعه صفراً

الحل

$$a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$
$$\boxed{t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots}$$
$$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4\ m$$

حل اخر: $\sin t = 0$ عند كل حد من

$t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$