الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة: التفاضل و تطبيقاته

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

* مشتقة ضرب اقترانين هي :
الاقتران الأول * مشتقة الثاني + الاقتران الثاني * مشتقة الأول

بالرموز اذا كان $y = g(x) \cdot f(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

مثال اذا كان $f(x) = (x^2-5)(2x+3)$ أوجد $f'(x)$ بطريقتين .

الحل ① قاعدة الضرب

$$f'(x) = (x^2-5)(2) + (2x+3)(2x)$$
$$= 2x^2 - 10 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x - 10$$

الحل ② لجري ضرب الاقترانين ثم أشتقه

$$f(x) = (x^2-5)(2x+3)$$
$$= 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 10$$

مثال اذا كان $f(x) = \sin x \ln x$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f'(x) = \sin x \left(\frac{1}{x}\right) + \ln x (\cos x)$$

مثال

$f(x) = (x^3+5x)e^x$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = (x^3+5x)e^x + e^x(3x^2+5)$$

مثال

$f(x) = (x^2-5x+1)e^5$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = (2x-5)e^5$$

لاحظ e^5 ثابت

مشتقة اقتران * ثابت = مشتقة الاقتران * الثابت نفسه

$$y = k f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = k f'(x)$$

مشتقة قسمة اقترانين هي :

$$\frac{\text{المقام} * \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} * \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

اذا كان $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال اذا كان $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ اوجد $f'(x)$. $f'(-1)$

الحل

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x+1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1-2x-2}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{(-2+1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

مثال $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ جد $f'(x)$ ثم $f'(0)$

الحل

$$f'(x) = \frac{e^x \cos x - \sin x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^x}(\cos x - \sin x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

$$f'(0) = \frac{1-0}{1} = 1$$

نظرية اذا كان $y = \frac{k}{f(x)}$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k\, f'(x)}{(f(x))^2}$$

(*) من قاعدة القسمة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{f(x)}(0) - k\, f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{-k\, f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال اذا كان $f(x) = \frac{-5}{1+x^2}$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f'(x) = \frac{--5\,(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{10x}{(1+x^2)^2}$$

مثال اذا كان $f(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{t}}$ جد $f'(t)$

الحل بسط الاقتران ← توحيد مقامات بالمقام

$$f(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{t}+\frac{1}{t}} = \frac{1}{\frac{t^2+1}{t}} = \frac{t}{t^2+1}$$

$$f'(t) = \frac{(t^2+1)(1) - t(2t)}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

مثال $f(x) = \frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{-1\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(e^x+\sqrt{x})^2}$$

مثال $f(x) = \frac{1}{3+\ln x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{-1\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(3+\ln x)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(3+\ln x)^2}$$

⊛ معدل تغير y بالنسبة لـ x هو $\frac{dy}{dx}$

معدل تغير $g(t)$ بالنسبة لـ t هو $g'(t)$

مثال تعطى درجة حرارة مريض بالاقتران: $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور المرض

T: درجة حرارة المريض بالفهرنهايت

① أجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة للزمن.

② أجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t = 2$ ثم فسر الناتج

الحل ①

$$T'(t) = \frac{(1+t^2)(4) - 4t(2t)}{(1+t^2)^2} + 0$$

$$= \frac{4 + 4t^2 - 8t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4 - 4t^2}{(1+t^2)^2}$$

②

$$T'(2) = \frac{4 - 16}{(1+4)^2} = -0.48$$

التفسير: تقل درجة حرارة المريض بمعدل 0.48

درجة فهرنهايتية عندما يكون الزمن 2 ساعة.

مثال وجد باحثون أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة h

بالأمتار باستعمال الاقتران

$$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$$

حيث t الزمن بالأشهر،

جد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة للزمن t

بعد مرور شهر واحد. ثم فسر الناتج

الحل

$$h'(t) = \frac{(4+t^2)(2t) - 3t^2(2t)}{(4+t^2)^2}$$

$$= \frac{8t+2t^3-6t^3}{(4+t^2)^2} = \frac{8t-4t^3}{(4+t^2)^2}$$

$$h'(1) = \frac{8-4}{(4+1)^2} = \frac{4}{25}$$

التفسير: الارتفاع يزداد بمعدل $\frac{4}{25}$ متر عندما $t=1$

مثال: اذا $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ اثبت ان

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

الحل

$$f'(x) = 9 * \frac{1}{x} + \frac{-4x}{4x^4} = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2-1}{x^3} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

مثال: يعطى سكان مدينة بالاقتران $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t: الزمن بالسنوات ، P عدد السكان بالآلاف

أجد معدل تغير سكان المدينة عندما $t=12$ ثم فسر الناتج.

الحل

$$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - 500t^2(2)}{(2t+5)^2} = \frac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$P'(12) = \frac{9000(12)+1000(12)^2}{(24+9)^2} \cong 231.$$

عدد السكان يزيد بمعدل 231 الف نسمة عندما $t=12$ سنة.

ملاحظة: اذا f ممكن تحليل واختصار . حلل واختصر ثم اشتقه

مثال: $f(x)=\dfrac{8+x}{\sqrt[3]{x}+2}$ جد $f'(x)$

الحل:

$$f(x)=\frac{(\cancel{2+\sqrt[3]{x}})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\cancel{\sqrt[3]{x}+2}}$$

$$f(x)=4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=0-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

مثال: اذا f : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ جد $f'(x)$

الحل:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

الآن أشتقه

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

مشتقة الاقترانات الدائرية

1 اذا كان $f(x)=\tan x$ فأن $f'(x)=\sec^2 x$

البرهان

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

2 اذا كان $f(x)=\cot x$ فأن $f'(x)=-\csc^2 x$

البرهان

$$f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

3 اذا كان $f(x) = \sec x$ فأن $f'(x) = \sec x \tan x$

البرهان

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{-1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

4 اذا كان $f(x) = \csc x$ فأن $f'(x) = -\csc x \cot x$

البرهان

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\csc x \cot x$$

مثال $f(x) = x^2 \tan x$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = x^2 \sec^2 x + 2x \tan x$$

مثال اذا كان $y = 5x \csc x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 5x(-\csc x \cot x) + 5(\csc x)$$

$$= -5x \csc x \cot x + 5 \csc x$$

مثال $f(x)=\dfrac{\sec x}{1+\cot x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x)=\frac{(1+\cot x)(\sec x\tan x)-\sec x(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$=\frac{\sec x\tan x+\sec x+\sec x\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

$$=\frac{\sec x(\tan x+1+\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$

لاحظ $\boxed{\cot x\tan x=1}$

مثال $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ اوجد $f'(x)$

الحل

$$f'(x)=\frac{(1+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

مثال جد $f'(x)$, $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{1-\sec x}$

الحل

$$f'(x)=\frac{(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$=\frac{\sec x\tan x-\cancel{\sec^2 x\tan x}+\sec x\tan x+\cancel{\sec^2 x\tan x}}{(1-\sec x)^2}$$

$$=\frac{2\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

مثال جد $f'(x)$, $f(x)=e^x(\tan x-x)$

الحل $f'(x)=e^x(\sec^2 x-1)+e^x(\tan x-x)$

مثال جد $f'(x)$, $f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$

الحل

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}}+3)$$

$$f(x)=x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

قاعدة سلسلة القوة

اذا كان $y=(f(x))^n$ فان

$$\frac{dy}{dx} = n\,(f(x))^{n-1} * f'(x)$$

مثال اذا كان $f(x) = (\sec x+\tan x)^3$ أوجد $f'(x)$ ثم اثبت ان

$$f'(x) = 3\sec x\, f(x)$$

الحل

$$f'(x) = 3(\sec x+\tan x)^2 (\sec x\tan x + \sec^2 x)$$

اخراج $\sec x$ عامل مشترك

$$f'(x) = 3\sec x\,(\sec x+\tan x)^2\,(\tan x+\sec x)^1$$

$$f'(x) = 3\sec x\,(\sec x+\tan x)^3 = 3\sec f(x)$$

H.W

مثال اذا كان $f(x) = (\sec x+\tan x)^n$ اثبت ان

$$f'(x) = n\sec x\, f(x)$$

مثال اذا كان $y = (\csc x+\cot x)^n$ اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = -n\csc x \cdot y$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = n(\csc x+\cot x)^{n-1}\,(-\csc x\cot x - \csc^2 x)$$

اخراج $-\csc x$ عامل مشترك

$$\frac{dy}{dx} = -n\csc x\,(\csc x+\cot x)^{n-1}(\cot x+\csc x)^1$$

$$= -n\csc x\,(\csc x+\cot x)^n = -n\csc x\cdot y$$

⊛ مشتقة ضرب (3) اقترانات .

اذا كان $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f(x)\,g(x)\,h'(x)$$

مثال جد $f'(x)$ $f(x) = x^2 e^x \sin x$

الحل

$$f'(x) = 2x\,e^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x (\cos x)$$

مثال جد $f'(x)$ بطريقتين $f(x) = x^2 (x+1)(x^3 - x)$.

الحل ①

$$f'(x) = 2x(x+1)(x^3 - x) + x^2 (1)(x^3 - x) + x^2 (x+1) * (3x^2 - 1)$$

الحل ② تحوله إلى ضرب اقترانين .

$$f(x) = (x^3 + x^2)(x^3 - x)$$

$$f'(x) = (x^3 + x^2)(3x^2 - 1) + (x^3 - x)(3x^2 + 2x)$$

مثال اذا كان $f(x) = \frac{xe^x}{x^2+5}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)\,(xe^x)' - xe^x (2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(xe^x + e^x \cdot 1) - 2x^2 e^x}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{x^3 e^x + \underline{x^2 e^x} + 5xe^x + 5e^x - \underline{2x^2 e^x}}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{x^3 e^x + 5xe^x + 5e^x - x^2 e^x}{(x^2+5)^2}$$

المشتقات العليا

اذا كان الاقتران $y = f(x)$ قابلاً للاشتقاق فان

① رمز المشتقة الاولى هو $f'(x)$ او y' او $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{d}{dx}(f(x))$

② رمز المشتقة الثانية هو $f''(x)$ او y'' او $\frac{d^2y}{dx^2}$ او $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$

③ رمز المشتقة الثالثة هو $f'''(x)$ او y''' او $\frac{d^3y}{dx^3}$ وهكذا .

$f'''(x) \to f^{(3)}(x)$ ، $y''' \to y^{(3)}$

* رمز المشتقة رقم (n) هي $f^{(n)}(x)$. او $y^{(n)}$ او $\frac{d^ny}{dx^n}$

مثال $f(x) = x^3 + \frac{5}{x}$ جد المشتقات الثلاثة الاولى .

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{5}{x^2}$$

$$f''(x) = 6x + \frac{10}{x^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 6 - \frac{30}{x^4}$$

او نكتب

$$f(x) = x^3 + 5x^{-1}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5x^{-2}$$

$$f''(x) = 6x + 10x^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = 6 - 30x^{-4}$$

$$= 6 - \frac{30}{x^4}$$

مثال $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ جد $f^{(2)}(x)$

الحل $f(x) = x^{-1} \cos x$

$f'(x) = x^{-1}(-\sin x) + -x^{-2}\cos x$

$f'(x) = -x^{-1}\sin x - x^{-2}\cos x$

$f''(x) = -x^{-1}\cos x + x^{-2}\sin x - x^{-2}(-\sin x) + 2x^{-3}\cos x$

$f''(x) = -x^{-1}\cos x + x^{-2}\sin x + x^{-2}\sin x + 2x^{-3}\cos x$

$f''(x) = -x^{-1}\cos x + 2x^{-2}\sin x + 2x^{-3}\cos x$

مثال
كسر الربط $f(x) = \frac{8+x}{2+\sqrt[3]{x}}$ جد $f''(x)$

الحل $f(x) = \frac{\cancel{(2+\sqrt[3]{x})}(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{\cancel{2+\sqrt[3]{x}}}$

$f(x) = 4 - 2x^{\frac{1}{3}} + x^{2/3}$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$

مثال

$f^{(4)}(x) \Rightarrow f(x) = x^2 e^x$

الحل

$$f'(x) = x^2e^x + 2xe^x$$

$$f''(x) = x^2e^x + 2xe^x + 2xe^x + 2e^x$$

$$f''(x) = x^2e^x + 4xe^x + 2e^x$$

$$f'''(x) = x^2e^x + 2xe^x + 4xe^x + 4e^x + 2e^x$$

$$f'''(x) = x^2e^x + 6xe^x + 6e^x$$

$$f''''(x) = x^2e^x + 2xe^x + 6xe^x + 6e^x + 6e^x$$

$$f''''(x) = x^2e^x + 8xe^x + 12e^x$$

مثال

$f'''(0) \Rightarrow f(x) = xe^x$

الحل

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + 2e^x$$

$$f'''(x) = xe^x + e^x + 2e^x$$

$$f'''(x) = xe^x + 3e^x$$

$$f'''(0) = 0e^0 + 3e^0 = 0 + 3 = 3$$

مثال اذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ اثبت ان $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

الحل

$$f'(x) = \frac{x^2 * \frac{1}{x} - \ln x\,(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \quad \text{———} \; (*)$$

$$f''(x) = \frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right) - 3x^2(1 - 2\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6}$$

$$= \frac{6x^2\ln x - 5x^2}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(6\ln x - 5)}{x^6} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

سؤال بالاعتماد على السؤال السابق اثبت ان

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x f(x) + 1 = 0$$

الحل

الطرف الايسر $= \cancel{x^4}\left(\frac{6\ln x - 5}{\cancel{x^4}}\right) + 4\cancel{x^3}\left(\frac{1 - 2\ln x}{\cancel{x^3}}\right) + 2\cancel{x}\cdot\frac{\ln x}{\cancel{x}} + 1$

$$= 6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$$= 8\ln x - 1 - 8\ln x + 1$$

$$= 0$$

٩ س صـ 103 الكتاب $f(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{x-3}$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f(x) = \frac{\frac{2}{1} - \frac{1}{x}}{\frac{x-3}{1}} = \frac{2x-1}{x(x-3)} = \frac{2x-1}{x^2-3x}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-6x-(4x^2-6x-2x+3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

١٠ س صـ 103 اذا كان: $f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$ اوجد $f'(x)$

الحل ①

$$f'(x) = (3x^2-1)(x^2+2)(x^2+x+1) + (x^3-x)(2x)(x^2+x+1) + (x^3-x)(x^2+2)(2x+1)$$

الحل ② نحوله الى ضرب اقترانين

$$f(x) = (x^5+2x^3-x^3-2x)(x^2+x+1)$$

$$f(x) = (x^5+x^3-2x)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = (x^5+x^3-2x)(2x+1) + (x^2+x+1)(5x^4+3x^2-2)$$

✱ صـ 103 اذا كان $f(0)=5$, $f'(0)=-3$, $g(0)=-1$, $g'(0)=2$

جد ما يلي: ⑫ $(fg)'(0)$ ⑬ $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ ⑭ $(7f-2fg)'(0)$

الحل

⑫ $(f\cdot g)'(0) = f(0)\cdot g'(0) + g(0)\cdot f'(0)$

$= 5(2) + -1(-3) = 13$

⑬ $\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \dfrac{g(0)\,f'(0) - f(0)\cdot g'(0)}{(g(0))^2} = \dfrac{-1(-3)-5(2)}{(-1)^2} = -7$

⑭ $(7f-2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(f\cdot g)'(0) = 7(-3) - 2(13)$

$= -21 - 26$

$= -47$

س 17 $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ جد $f'(4)$.

الحل

$$f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\cancel{(1+\sqrt{x})}}{\cancel{1+\sqrt{x}}} = 1-\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{-1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

س 19 أجد معادلة المماس للاقتران $f(x) = e^{x}\cos x + \sin x$ عند $(0,1)$

الحل

$$f'(x) = e^{x}(-\sin x) + e^{x}\cos x + \cos x$$

$$m_{\text{مماس}} = f'(0) = e^{0}(0) + 1(1) + 1 = 2$$

معادلة المماس

$$y-1 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x+1$$

س 23 اذا كان $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$ جد $f'''(x)$

الحل $f'''(x) = 0 - \frac{-2(1)}{x^2} = \frac{2}{x^2}$

س 28 اذا كان $y = e^{x}\sin x$ اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x}(-\cancel{\sin x}) + e^{x}\cos x + e^{x}\cos x + \cancel{e^{x}\sin x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{x}\cos x \longrightarrow \text{الطرف الايسر}$$

$$\text{الطرف الايمن} = 2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^{x}\cos x + \cancel{2e^{x}\sin x} - \cancel{2e^{x}\sin x}$$

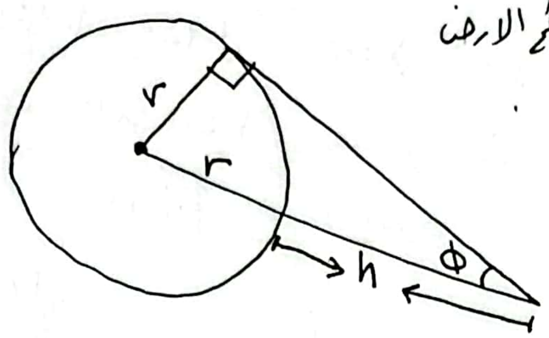
$$= 2e^{x}\cos x$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر .

$\circledast$ ص 104

h : المسافه بين القمر وسطح الارض

r = نصف قطر الارض .



س 29 اثبت ان :

$$h = r(\csc\phi - 1)$$

س 30 أجد معدل تغير h بالنسبة لـ ϕ عندما $\phi = \frac{\pi}{6}$ rad ، افرض $r = 6371$ km

الحل س 29

$$\sin\phi = \frac{r}{r+h} \Rightarrow \csc\phi = \frac{r+h}{r}$$

$$\Rightarrow r+h = r\csc\phi$$

$$\Rightarrow h = r\csc\phi - r$$

$$h = r(\csc\phi - 1) \quad \#$$

س 30

$$h = 6371(\csc\phi - 1)$$

$$\frac{dh}{d\phi} = 6371(-\csc\phi\cot\phi)$$

$$\left.\frac{dh}{d\phi}\right|_{\phi=\frac{\pi}{6}} = -6371\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}$$

$$= -6371(2)\sqrt{3} = -12742\sqrt{3}$$

ملاحظه . ايجاد المشتقة من رسمة الاقتران $f(x)$

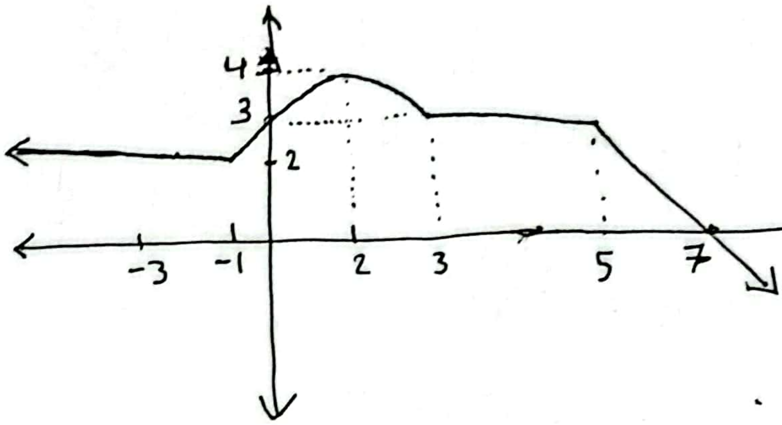
$\boxed{1}$ اذا كان مقابل $x=a$ على منحنى $f(x)$ خط أفقي (ثابت) فأن $f'(a)=0$

$\boxed{2}$ اذا كان مقابل $x=a$ يوجد قمة او قاع موجه فأن $f'(a)=0$ لان المماس عندها يكون أفقي

$\boxed{3}$ اذا كان مقابل $x=a$ على منحنى $f(x)$ مستقيم مائل فأن $f'(a)$ تساوي ميل المستقيم الواصل بين اي نقطتين عليه

4) اذا كان مقابل $x=a$ رأس حاد تكون $f'(a)$ غير موجوده .

5) اذا كان مقابل $x=a$ على منحنى $f(x)$ المماس عمودي تكون $f'(a)$ غير موجوده .



مثال الرسم يمثل $f(x)$

اوجد ما يلي:

① $f'(3)$ ، $f'(5)$

② $f'(-3)$ ، $f'(4)$

③ $f'(2)$ ④ $f'(6)$.

الحل ① $f'(5)=$ غ.م رأس حاد و $f'(3)=$ غ.م رأس حاد .

② $f'(4)=0$ ثابت , $f'(-3)=0$ ثابت .

③ $f'(2)=0$ قمة المماس عندها أفقي .

④ مقابل $x=6$ يوجد مستقيم مائل .

ميل المستقيم الواصل بين $(7,0)$, $(5,3)$ $= f'(6)$

$$f'(6)=\frac{3-0}{5-7}=\frac{3}{-2}=\frac{-3}{2}$$

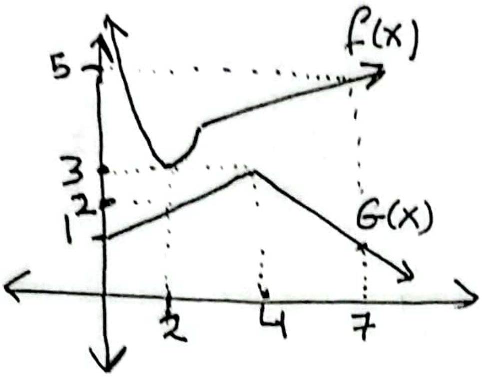
مثال اذا كان $g(x)=\sqrt{x+5}$ ، وبالاستعانه بالرسم بالشكل $f(x)$ السابق اوجد $(f.g)'(4)$

الحل

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+5}} \Leftarrow g'(4)=\frac{1}{6}$$

$$(f.g)'(4)=f(4).g'(4)+f'(4).g(4)$$
$$=3*\frac{1}{6}+0*3=\frac{1}{2}$$

* ص 105 يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $F(x)$ ، $G(x)$



إذا كان $P(x)=f(x)\cdot G(x)$ ، $Q(x)=\frac{f(x)}{G(x)}$ أجد

(32) $P'(2)$ (33) $Q'(7)$

الحل

(32) $f(2)=3$ ، $G(2)=3$

$f'(2)=0$ ، $G'(2)=$ ميل المستقيم الواصل بين $(0,1)$ ، $(2,2)$

$$G'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$P'(x)=f(x)\cdot G'(x)+G(x)\cdot f'(x)$$

$$P'(2)=f(2)\,G'(2)+G(2)\cdot f'(2)$$

$$=3*\frac{1}{2}+3*0=\frac{3}{2}$$

(33) $$Q'(x)=\frac{G(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot G'(x)}{(G(x))^2}$$

$$Q'(7)=\frac{G(7)\,f'(7)-f(7)\cdot G'(7)}{(G(7))^2}$$

$$=\frac{1*(\frac{1}{4})-5(\frac{-2}{3})}{1^2}=\frac{43}{12}$$

$f'(7)=$ ميل المستقيم الواصل بين $(7,5)$ ، $(3,4)$ $=\frac{1}{4}$

$G'(7)=$ ميل المستقيم الواصل بين $(7,1)$ ، $(4,3)$

$$f'(7)=\frac{3-1}{4-7}=-\frac{2}{3}$$

(*) $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، $x \neq 1$ أجب عن الأسئلة

س 36: جد $\frac{dy}{dx}$ ؟؟

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

س 37: أعد كتابة x اقتران بدلالة y ثم جد $\frac{dx}{dy}$

الحل

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1$$

$$yx - y = x+1$$

$$yx - x = y+1$$

$$x(y-1) = y+1$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)(1)-(y+1)(1)}{(y-1)^2} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

س 38: بين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

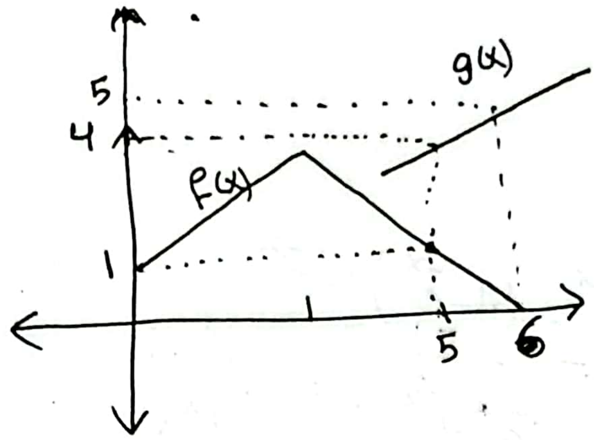
$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} = -2 * \frac{(x-1)^2}{4}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{-2} \quad (*)$$

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{(x-1)^2}{-2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مثال



اذا كان $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ جد $\varphi'(5)$

الحل

$$\varphi'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\varphi'(5) = \frac{g(5)\,f'(5) - f(5)\,g'(5)}{(g(5))^2} \quad ⊛$$

من الرسم $g(5) = 4 \,،\, f(5) = 1$

ميل المستقيم الواصل بين $f'(5) = (6,0)\,,\,(5,1)$

$$f'(5) = \frac{1-0}{5-6} = \frac{1}{-1} = -1$$

ميل المستقيم الواصل بين $g'(5) = (6,5)\,,\,(5,4)$

$$g'(5) = \frac{4-5}{5-6} = \frac{-1}{-1} = 1$$

نعوض ⊛

$$\varphi'(5) = \frac{4(-1) - 1(1)}{(4)^2} = \frac{-5}{16}$$