الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة: التفاضل و تطبيقاته

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

الدرس الثالث : قاعدة السلسلة

قاعدة اذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

مثال اذا كان $y = u^3 + 2u$, $u = x^2 - 5x$ جد $\frac{dy}{dx}$

ثم $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 1$.

الحل

$$\frac{du}{dx} = 2x - 5 \quad , \quad \frac{dy}{du} = 3u^2 + 2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = (3u^2+2)(2x-5)$$

$$= 6xu^2 - 15u^2 + 4x - 10$$

$$= 6x(x^2-5x)^2 - 15(x^2-5x)^2 + 4x - 10$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6(1-5)^2 - 15(1-5)^2 + 4 - 10$$

$$= 96 - 15(16) - 6$$

$$= 90 - 240 = -150$$

مثال $y = m^2 + 3m$, $m = 2x + 1$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل

$$\frac{dm}{dx} = 2 \quad , \quad \frac{dy}{dm} = 2m + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \cdot \frac{dm}{dx} = (2m+3)(2)$$

$$= 4m + 6 = 4(2x+1) + 6 = 8x + 10$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8$$

قاعدة $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ حفظ

مثال اذا كان $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=x^3-3$ اوجد

① $(f\circ g)'(x)$ ② $(g\circ f)'(x)$

الحل

$f'(x)=2x$ ، $g'(x)=3x^2$

① $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))*g'(x)$

$= f'(x^3-3)*3x^2$

$= 2(x^3-3)*3x^2 = 6x^5-18x^2$

② $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))*f'(x)$

$= g'(x^2+1)*2x$

$= 3(x^2+1)^2*2x$

$= 6x(x^2+1)^2$

مراجعة : تركيب اقترانين

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

تقرأ f بعد g ل x

مثال $f(x)=x^2-x$

$g(x)=2x^2+1$ اوجد $(f\circ g)(2)$

الحل

$(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(9)$

$= 9^2-9 = 72$

قاعدة اذا كان $y=f(g(x))$ فان

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))*g'(x)$$

مثال اذا كان $A(x) = f(g(x))$ وكان $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$

$f'(5) = 3$, $f'(-2) = 4$, $f(-2) = 8$ أوجد $A'(5)$

الحل

$$A'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$
$$A'(5) = f'(g(5)) * g'(5)$$
$$= f'(-2) * 6 = 4 * 6 = 24$$

مثال اذا كان $f(x) = x^3 + 1$ ، $g(x) = 3x - 1$

أوجد ① $(f' \circ g)'(1)$ ② $(f \circ g)''(1)$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad g'(x) = 3$$
$$f''(x) = 6x \quad g''(x) = 0$$

① $$(f' \circ g)'(1) = f''(g(1)) \cdot g'(1)$$
$$= f''(2) * 3 = 18(3) = 54$$

② نجد $(f \circ g)'(x)$ ثم اشتقاقها لايجاد $(f \circ g)''(x)$

ثم عوض $x = 1$ لايجاد $(f \circ g)''(1)$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$
$$= f'(3x-1) * 3$$
$$= 3(3x-1)^2 * 3 = 9(3x-1)^2$$
$$(f \circ g)''(x) = 18(3x-1) * 3 = 54(3x-1)$$
$$(f \circ g)''(1) = 54(3-1) = 54 * 2 = 108$$

مشتقة الاقترانات المشهورة

مشتقة الاقترانات المثلثية

$\boxed{1}$ $\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos(g(x)) * g'(x)$

نفس القواعد السابقة * مشتقة الزاوية.

$\boxed{2}$ $\frac{d}{dx}(\cos g(x)) = -\sin g(x) * g'(x)$

$\boxed{3}$ $\frac{d}{dx}(\tan g(x)) = \sec^2(g(x)) * g'(x)$

$\boxed{4}$ $\frac{d}{dx}(\cot g(x)) = -\csc^2 g(x) * g'(x)$

$\boxed{5}$ $(\sec g(x))' = \sec g(x) \tan g(x) * g'(x)$

$\boxed{6}$ $\frac{d}{dx}(\csc g(x)) = -\csc g(x) \cot g(x) * g'(x)$

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي

الاقتران نفسه * مشتقة الأس

$\boxed{7}$ $\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} * g'(x)$

$\boxed{8}$ $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

مثال اوجد المشتقة فيما يلي

① $f(x) = \tan(x^2+3) \Rightarrow f'(x) = \sec^2(x^2+3) * 2x$

② $y = \sec(5x) \Rightarrow y' = \sec 5x \tan 5x * 5$

$= 5 \sec 5x \tan 5x$

③ $y = 3\cot(\sin x) \Rightarrow y' = -3\csc^2(\sin x) * \cos x$

$\boxed{4}$ $y = 2\cos(\tan 3x) \Rightarrow y' = -2\sin(\tan 3x) * \sec^2 3x * 3$

$y' = -6\sec^2 3x \cdot \sin(\tan 3x)$

مثال اذا كان $f(x) = \ln(3x+1) + e^{x^2}$ أوجد $f'(x)$ ، $f'(0)$

الحل

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1} + 2x\,e^{x^2}$$

$$f'(0) = \frac{3}{1} + 2(0)\,e^{0} = 3$$

مثال $y = e^{5\ln x} - 3x^2$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = e^{\ln x^5} - 3x^2 = x^5 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x$$

ملاحظه

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{n\ln x} = e^{\ln x^n} = x^n$$

قاعدة سلسلة القوة

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^n = n\left(f(x)\right)^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f^n(x)\right) = n f^{(n-1)}(x) \cdot f'(x)$$

مثال اذا كان $y = \tan^5 x + 3x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 5\tan^4 x \cdot \sec^2 x + 3$$

او يمكن كتابة :

$$y = (\tan x)^5 + 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(\tan x)^4 \cdot \sec^2 x + 3$$

ملاحظه $\sin^n x = (\sin x)^n$ لكن $\sin x^n \neq (\sin x)^n$

وهكذا لبقية الاقترانات المثلثية .

مثال $f(x) = (\ln x - \sin x)^3$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f'(x) = 3(\ln x - \sin x)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \cos x\right)$$

مثال جد $f'(x)$ ← $f(x) = \sqrt{\sin 3x + \ln x}$

الحل

$$f'(x) = \frac{\cos 3x * 3 + \frac{1}{x}}{2 * \sqrt{\sin 3x + \ln x}}$$

مثال جد $f'(x)$ ← $f(x) = \sqrt[3]{(\ln 2x)^5}$

الحل

$$f(x) = (\ln 2x)^{\frac{5}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}(\ln 2x)^{\frac{2}{3}} * \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}x}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3x}(\ln 2x)^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3x}\sqrt[3]{(\ln 2x)^2}$$

مثال جد $f'(x)$ ← $f(x) = \ln(3x+1)^5$

الحل

$$f(x) = 5\ln(3x+1)$$

$$f'(x) = 5 * \frac{3}{3x+1} = \frac{15}{3x+1}$$

ملاحظه استخدام قوانين اللوغاريتمات قبل الاشتقاق ان أمكن ثم أشتق

مثال جد $f'(x)$ ← $f(x) = \ln x^5(2x+1)^3$

الحل

$$f(x) = \ln x^5 + \ln(2x+1)^3$$

$$f(x) = 5\ln x + 3\ln(2x+1)$$

$$f'(x) = \frac{5}{x} + 3 * \frac{2}{2x+1} = \frac{5}{x} + \frac{6}{2x+1}$$

مثال جد y' ← $y = (\ln 5)^7$

الحل $y' = 0$

الاشتقاق المتسلسل لقاعدة السلسلة:

مثال: جد y' إذا كان $y = e^{\sin 3x}$ ؟؟

الحل:

$$y' = e^{\sin 3x} * \cos 3x * 3$$

$$y' = 3\cos 3x \, e^{\sin 3x}$$

مثال: إذا كان $f(x) = \sin(\tan x)$ جد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \cos(\tan x) * \sec^2 x$$

مثال: $f(x) = \sin(\tan\sqrt{x})$ أوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \cos(\tan\sqrt{x}) \cdot \sec^2\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \tan^3(\sqrt{x})$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2\sqrt{x} * \sec^2\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}} \tan^2\sqrt{x} \cdot \sec^2\sqrt{x}$$

مثال:

$f(x) = \sin^4(\tan 3x)$ جد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = 4\sin^3(\tan 3x) \cdot \cos(\tan 3x) * \sec^2(3x) * 3$$

$$f'(x) = 12\sin^3(\tan 3x) * \cos(\tan 3x) * \sec^2(3x)$$

مثال: $y = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$ جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos(7x^3+6x-1) * -\sin(7x^3+6x-1) * (21x^2+6)$$

مثال أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x} \cdot \sin 4x$

عندما $x = \frac{\pi}{8}$

الحل

$$f'(x) = -0.2 e^{-0.2x} \cdot \sin 4x + e^{-0.2x} * \cos(4x) * 4$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.2 e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \sin\frac{\pi}{2} + e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)} * \underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{\text{صفر}} * 4$$

$$= -0.2 e^{-0.025}$$

مثال أجد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = (2x+1)^5 \cdot (x^3 - x + 1)^4$

عند $x = -1$

الحل

$$f(-1) = (-2+1)^5 (-1+1)^4 = -1 \Rightarrow (\overset{x_1}{-1}, \overset{y_1}{-1})$$

$$f'(x) = (2x+1)^5 * 4(x^3 - x + 1)^3 (3x^2 - 1) + (x^3 - x + 1)^4 * 5(2x+1)^4 (2)$$

$$m_{\text{المماس}} = f'(-1) = -1 * 4 * 1 * 2 + 1 * 5 * 1 * 2 = -8 + 10$$

$$m_{\text{المماس}} = 2$$

معادلة المماس هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - -1 = 2(x - -1) \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال أجد ميل العمودي على المماس للاقتران $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل

$$f'(x) = \frac{e^{2x} * 2\cos x(-\sin x) - \cos^2 x * 2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$$

$$m_{\text{المماس}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi} * 2(0)(-1) - 0 * 2e^{\pi}}{(e^{\pi})^2}$$

ميل المماس $= 0$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{-1}{0} =$ غير معرف (العمودي رأسي)

مثال طرحت أحدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

اذا مثل الاقتران: $t>0$, $N(t) = \dfrac{250000t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرح هذا المنتج حيث t الزمن بالاسابيع

① أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة للزمن

② أجد $N'(52)$ ثم فسر الناتج.

الحل ①

$$N'(t) = \frac{(2t+1)^2 * 500000t - 250000t^2 * 2(2t+1)*2}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500000t) - 1000000t^2(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

بقسمة البسط والمقام على $2t+1$

$$= \frac{(2t+1)*500000t - 1000000t^2}{(2t+1)^3}$$

$$= \frac{50000t^2}{(2t+1)^3}$$

②

$$N'(52) = \frac{500000(52)^2}{(104+1)^3} \approx 22$$

التفسير:

عدد القطع المبيعة يزداد بمعدل 22 قطعة لكل أسبوع عندما $t=52$ أسبوع.

أتحقق من فهمي ص 113 تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات بالدينار باستعمال الاقتران

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج

a) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة الى عدد القطع المبيعة.

b) اجد $U'(20)$ ثم أفسر الناتج.

الحل

(a

$$U'(x) = \frac{80 * \frac{(3x+4)(2) - (2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2 * \sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}} = \frac{200}{(3x+4)^2} \cdot \sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

(b

$$U'(20) = \frac{200}{(64)^2} * \sqrt{\frac{64}{41}} \approx 0.061$$

قيمة بدل الخدمة يزداد بمقدار 0.061 دينار لكل قطعة عند بيع (20) قطعة.

نظرية $\boxed{1}$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^{g(x)}\right) = g'(x)\, a^{g(x)} \ln a \quad \boxed{2}$$

البرهان $\boxed{1}$

$$a^x = e^{\ln a^x} \Rightarrow a^x = e^{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln a}\right)$$

$$= \ln a\, e^{x\ln a} = \ln a \cdot e^{\ln a^x}$$

$$= \ln a \cdot a^x$$

$$= a^x \ln a$$

برهان [2] بنفس الاسلوب

$$a^{g(x)} = e^{\ln a^{g(x)}} = e^{g(x)\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{g(x)\ln a}\right)$$

$$= g'(x)\ln a \, e^{g(x)\ln a} = g'(x)\ln a \, e^{\ln a^{g(x)}}$$

$$= g'(x) . \ln a . a^{g(x)} = g'(x) a^{g(x)} \ln a$$

مثال $f(x) = 3^{5x+1}$ جد $f'(x)$ ثم $f'(0)$

الحل

$$f'(x) = 5 . 3^{5x+1} \ln 3$$

$$f'(0) = 5 * 3^{1} * \ln 3 = 15 \ln 3$$

مثال $f(x) = \pi^{\pi x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \pi . \pi^{\pi x} \ln \pi = \pi^{1+\pi x} \ln \pi$$

مثال $f(x) = 4^{2x} + e^{4x} - 5(3)^{x^2+1}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = 2 * 4^{2x} \ln 4 + 4e^{4x} - 5(2x) . 3^{x^2+1} \ln 3$$

(*) مشتقة الاقتران

نظرية مفقط

[2] $y = \log_a f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$$

[1] $y = \log_a x$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

مفقط

ملاحظة قانون سابق: من قوانين اللوغاريتمات

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

البرهان $\boxed{1}$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{x \ln a}$$

برهان $\boxed{2}$

$$\log_a f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln f(x)}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$$

مثال $y = \log_3 \sin x$ جد y' ؟

الحل

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln 3} \Rightarrow y' = \frac{\cot x}{\ln 3}$$

مثال $f(x) = \log \sec x$ جد $f'(x)$:

الحل

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x \ln 10} = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

مثال $f(x) = \log_8 (x^2+1)^7$ جد $f'(x)$.

الحل

$$f(x) = 7 \log_8 (x^2+1) \Rightarrow f'(x) = 7 * \frac{2x}{(x^2+1)\ln 8}$$

مثال $f(x) = \log \sqrt{\cos x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f(x) = \frac{1}{2}\log \cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} * \frac{-\sin x}{\cos x \ln 10}$$

$$= -\frac{1}{2\ln 10}\tan x = -\frac{\tan x}{\ln 100}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية:

اذا كان كل من h ، g اقترانين بالنسبة للمتغير الوسيط t

وكان $x = h(t)$ و $y = g(t)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{h'(t)} \quad , \quad h'(t) \neq 0$$

مثال اذا كان $x = t^2 + 5t$ ، $y = t^3 + 3t$ أوجد $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}$

الحل

$$\frac{dy}{d\cancel{x}} = \frac{3t^2+3}{2t+5} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{3+3}{2+5} = \frac{6}{7}$$

مثال اوجد معادلة المماس لمنحنى المعادلة الوسيطية عند $t = \frac{\pi}{4}$

علماً ان $x = 2\sin t$ ، $y = 3\cos t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

الحل

اولاً نجد النقطة المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2 * \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\overset{x_1}{\sqrt{2}}, \overset{y_1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)$$

ثانياً الميل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{2\cos t} = -\frac{3}{2}\tan t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{2}$$

معادلة المماس:

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}(x - \sqrt{2}) \;/ * \sqrt{2}$$

$$y - 3 = \frac{-3}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y + \frac{3}{\sqrt{2}}x + 6 = 0$$

أتحقق من فهمي ص 119

أجد معادلة المماس للمعادلة الوسيطية عند $t = \frac{\pi}{4}$

$x = \sec t \quad , \quad y = \tan t \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

الحل نقطة التماس: $x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad , \quad y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$x_1 \quad y_1$

$(\sqrt{2} , 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \frac{\sec x}{\tan x}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y - 1 = \sqrt{2}x - 2 \Rightarrow y - \sqrt{2}x + 1 = 0$$

س 24 ص 120 للكتاب

اذا كان $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ اثبت ان: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

الحل

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}\,(1) - x * \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} * \sqrt{x^2+1}}}{1}}{x^2+2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

س 8 جد $f'(x)$ $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

الحل

$$f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{-e^x}{1-e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$$

س 18 ص 120 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$ أوجد $f'(x)$

الحل

$f'(x) = 4\tan^3(\sec(\cos x)) * \sec^2(\sec(\cos x)) * \sec(\cos x)\tan(\cos x) * -\sin x$

س 14 اذا كان : $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$ أوجد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{\cancel{x} * \frac{10}{\cancel{x}\ln 4} - 10\log_4 x\,(1)}{x^2} = \frac{\frac{10}{\ln 4} - \frac{10\log_4 x}{1}}{x^2}$$

$$= \frac{10 - 10\ln 4 \log_4 x}{x^2 \ln 4}$$

س 6 ص 120 $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$ جد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = x^2 \sec^2\frac{1}{x} * \frac{-1}{x^2} + \tan\frac{1}{x} * (2x)$$

$$= -\sec^2\frac{1}{x} + 2x\tan\frac{1}{x}$$

(*) ص 120 يمثل الاقتران $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري.

س 25 أجد معدل نمو المجتمع بعد (3) ساعات بدلالة الثابت N.

س 26 اذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة أجد الثابت k بدلالة الثابت N.

الحل س 25

$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t}$

$A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$

س 26 الحل:

$$A'(k) = 0.2$$

$$0.1 N e^{0.1k} = 0.2$$

$$e^{0.1k} = \frac{0.2}{0.1 N} \Rightarrow e^{0.1k} = \frac{2}{N}$$

$$\ln e^{0.1k} = \ln \frac{2}{N} \Rightarrow 0.1k = \ln 2 - \ln N$$

$$k = 10 \ln\left(\frac{2}{N}\right) \Leftarrow k = 10\ln 2 - 10 \ln N$$

س 29 اذا كان $f(x) = \cos(x^2)$ جد $f''(x)$

الحل

$$f'(x) = \underbrace{-2x}_{1}\, \underbrace{\sin x^2}_{2}$$

$$f''(x) = -2x * \cos x^2 * 2x + \sin x^2 * -2$$

$$= -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$$

س 31 ص 121 مثال

$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ جد معدل تغير $A(t)$ عندما $t = 2$

الحل

$$A'(t) = 20 * \frac{1}{140} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} * \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A'(t) = \frac{1}{7}(\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{صفر} - \ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$A'(t) = -\frac{\ln 2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$A'(2) = -\frac{\ln 2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{70}}$$

121

* ص تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الاعلى والى الأسفل ويمثل الاقتران

$S(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند اي زمن لاحق

س 32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$

الحل

$$V(t) = 0.1\,(2.4)\cos(2.4t)$$

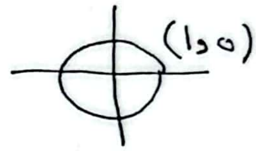
$$V(1) = 0.24\cos(2.4) = -0.177 \text{ cm/s}$$

س 33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفر.

الحل

$$V(t) = 0 \Rightarrow 0.24\cos(2.4t) = 0$$

$\cos(2.4t) = 0$ هذا يعني



$\sin(2.4t) = 1$ أو -1

$$\therefore S(t) = 0.1\sin(2.4t) = 0.1\,(1) = 0.1$$

أو $S(t) = 0.1\,(-1) = -0.1$

س 34 : أجد موقع الكرة عندما تكون تسارعها صفر.

الحل

$$V(t) = 0.24\cos(2.4t)$$

$$a(t) = -0.24\,(2.4)\sin(2.4t) = 0$$

$$\sin(2.4t) = 0$$

$$S(t) = 0.1\sin(2.4t)$$

$$\therefore S(t) = 0.1\,(0) = 0$$

اي عند مرورها بموقع الاتزان.

س 39 ص 121 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2(1-\cos t)$ و

$x = 2(t-\sin t)$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ اثبت ان ميل

المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$

هما : $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ على الترتيب .

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2}\sin t}{\cancel{2}(1-\cos t)}$$

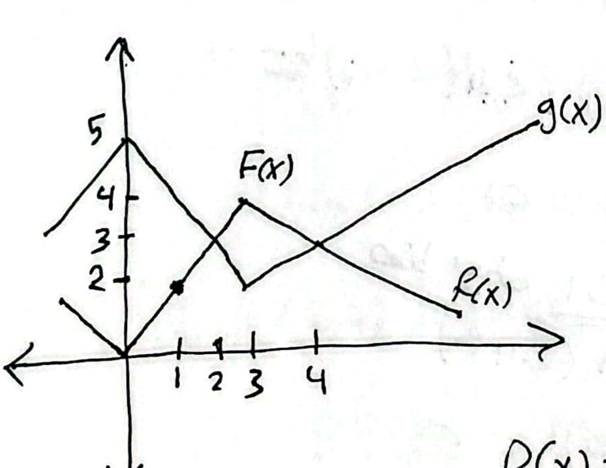
$$m_{\text{المماس}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$m_{\text{المماس}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}-1} * \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}_{\text{الضرب بالمرافق}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \boxed{\sqrt{2}+1}$$

ميل المماس من الحل $= \sqrt{2}+1 \Rightarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{\sqrt{2}+1}$ نضرب بالمرافق ونقسم عليه

ميل العمودي $= \frac{-1}{\sqrt{2}+1} * \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$$= \frac{-\sqrt{2}+1}{2-1} = \boxed{1-\sqrt{2}}$$



* ص 121

الشكل يمثل منحنى $f(x)$ ، $g(x)$

$h(x) = f(g(x))$ ، $p(x) = g(f(x))$

س 41 اجد $p'(1)$ ، س 40 : أجد $h'(1)$

س 40

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(1) = f'(g(1)) * g'(1)$$

$$= f'(4) * g'(1)$$

$$= -\frac{1}{3} * -1 = \frac{1}{3}$$

استنتاجا من الرسم : $g(1) = 4$

ميل المستقيم الواصل بين $(3,2)$, $(0,5)$ = $g'(1)$

$$g'(1) = \frac{5-2}{0-3} = -1$$

ميل المستقيم الواصل بين $(5,3)$ ، $(2,4)$ = $f'(4)$

$$f'(4) = \frac{4-3}{2-5} = -\frac{1}{3}$$

س 41 :

$$p(x) = g(f(x)) \Rightarrow p'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$$

$$p'(1) = g'(f(1)) * f'(1) = g'(2) * f'(1) \quad \text{—} \; *$$

$g'(2)$ = ميل المستقيم الواصل بين $(3,2)$ ، $(0,5)$ = -1

$f'(1)$ = ميل المستقيم الواصل بين $(0,0)$ و $(2,4)$ = 2

$$\therefore p'(1) = -1 * 2 = -2$$

⊛ اذا ~B الاقتران: $y = \ln(ax+b)$ حيث $a>0$ ، $b>0$ وم~ ميل المماس للاقتران عند النقطة P هو 1 أجب عن الأسئلة الثلاثة

س42 اثبت ان الاحداثي x للنقطة P أقل من 1 .

الحل

$$y' = \frac{a}{ax+b} = 1$$

$$ax+b = a \Rightarrow a - ax = b$$

$$ax = a - b \Rightarrow x = 1 - \frac{b}{a} < 1$$

لان $\frac{b}{a}$ عدد موجب .

س43 أجد قيمة كل من a ، b علما ان P هي النقطة (0,2)

الحل

$$(0,2) \rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

$$b = a$$

$$(0,2) \rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow \ln b = 2$$

$$b = e^2 \Rightarrow a = e^2$$

س44 أجد احداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

الحل من س43

$$f(x) = \ln(e^2 x + e^2)$$

$$= \ln e^2(x+1) = \ln e^2 + \ln(x+1)$$

$$f(x) = 2\ln e + \ln(x+1)$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$x+1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = +1}$$

$$f(1) = 2\ln e + \ln(1+1) = 2 + \ln 2$$

ن النقطة هي $(1, 2+\ln 2)$

* ص 122 لمعطى منحنى المعادلة الوسيطية : $y=2t$ و $x=t^2$

س 45 اجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$$

س 46 اجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(a^2,2a)$

الحل

$m_{مماس}=\frac{1}{a}$ و $m_{العمودي}=-a$

معادلة العمودي $y-2a=-a(x-a^2)$

$$y=-ax+a^3+2a$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=t^2\\a^2&=t^2\\a&=t\end{aligned}}$$

س 47: اثبت ان مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الاحداثيين هي: $\frac{1}{2}|a|(2+a^2)^2$

الحل

المقطع x لمعادلة العمودي $y=0$ ⇐ $-ax+a^3+2a=0$

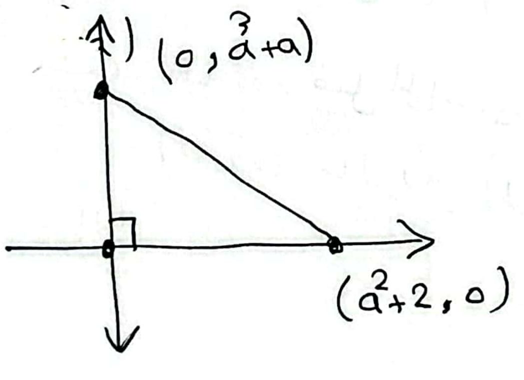
$ax=a^3+2a \Rightarrow x=a^2+2$

النقطة $(a^2+2,0)$ رأس للمثلث.

المقطع y ⇐ $x=0$: $y=a^3+2a$

رأس $(0,a^3+2a)$

تقاطع المحورين $(0,0)$ رأس



$$A=\frac{1}{2}(a^3+2a)(a^2+2)$$

$$A=\frac{1}{2}a(a^2+2)(a^2+2)$$

$$A=\frac{1}{2}|a|(a^2+2)^2$$

(*) ص 122

س 49 اذا كان ~ $y = e^{x} \sin^2 x \cdot \cos x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = e^{x} \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \sin^2 x \cos x + e^{x} * 2\sin x \cos x \cdot \cos x + e^{x} \sin^2 x (-\sin x)$$

$$= e^{x} \sin^2 x \cos x + 2 e^{x} \sin x \cos x - e^{x} \sin^3 x$$

$$= e^{x} \sin x \,(\sin x \cos x + 2\cos x - \sin^2 x)$$

س 48 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

(*) ص 122 اذا كان ~

$x = \sin 2t \quad , \quad y = \sin 3t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

س 50 اذا كان ~ المماس لمنحنى المعادلة أفقياً عند النقطة A الواقعة بالربع الأول . أجد احداثي A .

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$$

$\cos(3t) = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = 3\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} = 1$

$\therefore A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

س 51 اذا كان مماس المنحنى موازياً لمحور y عند النقطة B الواقعة بالربع الأول.

الحل

الميل = غير معرف $\Leftarrow \cos 2t = 0$

$2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$x = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$y = \sin 3\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

س 52 اذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة.

الحل $(\overset{x}{0}, \overset{y}{0}) \Leftarrow$

$x = y = 0$

$\sin 2t = \sin 3t = 0$

تتحقق هنا عندما $\underline{t = 0}$ و $t = \pi$

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3(-1)}{2(1)} = \frac{-3}{2}$

122

* س يمثل الاقتران $t \geq 0$ ، $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$

موقع جسم يتحرك بمستقيم

س53 أجد حركة الجسم وتسارعه بعد t ثانية .

الحل

$$V(t) = s'(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = V'(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

س54 أجد موقع الجسم وتسارعه عندما سرعته صفراً

الحل

$V(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1}$

$s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln(0.9)$

$$a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} = 2.2 \ m/s^2$$

س55 متى يعود الجسم إلى الموقع الابتدائي ؟

الحل

$s(t) = s(0)$

$\ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9)$

$t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$

$t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0$

$\cancel{t = 0}$, $\boxed{t = 2}$