الرياضيات -المسار الأكاديمي
الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة: التفاضل و تطبيقاته

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

إعداد:
الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:
0777298115

الاشتقاق الضمني

العلاقة الصريحة : يمكن كتابتها بالصورة $y = f(x)$

يكون y موضع للقانون بدلالة متغير آخر x .

مثل ① $y = x^3 + 5x - 1$ ② $y = \sqrt{x+3}$ ③ $y = \frac{x^2+1}{2x-5}$

العلاقة الضمنية : لا يمكن كتابتها بالصورة $y = f(x)$

مثل ① $xy + x = y^3 + y$ ② $x^2y^3 = y - \sqrt{x}$

خطوات الحل :

$\boxed{1}$ نشتق الحدود حداً حداً . بحيث الحد الذي يحوي x اشتقاق عادي والحد الذي يحوي y اشتقاق عادي ثم نضربه بـ $\frac{dy}{dx}$ او y' ..

مثلاً ① $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ ② $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$

$\boxed{2}$ نجعل جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ لطرف والحدود التي تخلو من $\frac{dy}{dx}$ بالطرف الآخر .

$\boxed{3}$ نخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك $\boxed{4}$ نقسم الطرفين على معامل $\frac{dy}{dx}$

مثال اذا كان $x^3 - 2y^5 - y^2 + 3x = 10x^2$ جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$3x^2 - 10y^4\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} + 3 = 20x$$

$$-10y^4\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 20x - 3x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx}(-10y^4 - 2y) = 20x - 3x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20x - 3x^2 - 3}{-10y^4 - 2y}$$

مثال اذا كان $x^3y+2y^2=10$ جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $y=2$

الحل اشتقاق

$$x^3\frac{dy}{dx}+y(3x^2)+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^3\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=-3yx^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^3+4y)=-3yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3yx^2}{x^3+4y} \quad *$$

نعوض $y=2$ بالمعادلة الاصلية

$$\Rightarrow x^3(2)+2(2)^2=10$$

$$2x^3=2 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=\frac{-3(2)(1)^2}{1+4(2)}=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$$

مثال اذا كان $\tan y=x^2y+x^3$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}=x^2\frac{dy}{dx}+y(2x)+3x^2$$

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}-x^2\frac{dy}{dx}=2xy+3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(\sec^2 y-x^2)=2xy+3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy+3x^2}{\sec^2 y-x^2}$$

ملاحظة) معدل تغير ϕ بالنسبة لـ x = $\frac{d\phi}{dx}$

① $\frac{d}{dx}(\sin\phi)=\cos\phi\frac{d\phi}{dx}$ ② $\frac{d}{dx}(t^2)=2t\frac{dt}{dx}$

وهكذا

مثال اذا كانت العلاقة التي تربط ϕ بـ x هي

$\tan\phi = \frac{4x}{x^2+252}$ فما معدل تغير ϕ بالنسبة لـ x .

الحل

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dx} = \frac{(x^2+252)(4) - 4x(2x)}{(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{-4x^2 + 1008}{(x^2+252)^2}$$

مثال اذا كان $2x + 5y^2 = \sin y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$2 + 10y \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} - 10y \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y - 10y) = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 10y}$$

مثال اذا كان : $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل بالضرب التبادلي :

$$x^3 + x^2 y = x - y$$

الحل

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y(2x) = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+1) = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{x^2+1}$$

مثال اذا كان $\tan(x-y) = 2xy^2+1$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 2x(2y)\frac{dy}{dx}+y^2(2)+0$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 4xy\frac{dy}{dx}+2y^2$$

$$4xy\frac{dy}{dx}+\sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = \sec^2(x-y)-2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4xy+\sec^2(x-y)\right) = \sec^2(x-y)-2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y)-2y^2}{4xy+\sec^2(x-y)}$$

مثال اذا كان $x = \sin y$ حيث $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$

اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

الحل

أشتق $x = \sin y$

$$1 = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

$\cos y = \sqrt{1-x^2}$

عوض *

مثال H.W

اذا كان : $x^2+1 = \cos y$ حيث y بالربع الأول.

اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال اذا كان $x = \csc y$ ، y بالربع الأول اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

الحل

$$1 = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc y \cot y} = \frac{-1}{x \cot y} \quad \text{—} \quad *$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1+\cot^2 y &= \csc^2 y \\ \cot^2 y &= x^2-1 \\ \cot y &= \sqrt{x^2-1} \end{aligned}}$$

عوض *

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال H.W اذا كان $5x = \sec y$ ، $0 < y < \frac{\pi}{2}$

اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال H.W

اذا كان $x = \tan y$ اثبت انه $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

مثال $x = \cot y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=5$

الحل

$$1 = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = \frac{-1}{1+25} = \frac{-1}{26}$$

مثال أجد ميل المماس لمنحنى العلاقة $e^{2x}\ln y = x+y-2$ عند $(1,1)$

الحل

$$e^{2x}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}}{y} + \ln y * 2e^{2x} = 1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} * \frac{e^{2x}}{y} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y}-1\right) = 1-2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y}-1}$$

صفر

$$\text{ميل المماس} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1-2e^{2}\cancel{\ln 1}}{\frac{e^2}{1}-1} = \frac{1}{e^2-1}$$

مثال اجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = x$ عند $x=4$

الحل $x=4 \Leftarrow y^2=4 \Leftarrow y=\mp 2$ يوجد نقطتان هما

$(4,2)\,,\,(4,-2)$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

المماس عند $\overset{x_1\ y_1}{(4,2)} \Leftarrow m = \frac{1}{2(2)} \Leftarrow m = \frac{1}{4}$

$$y-2 = \frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x+1$$

المماس عند $\overset{x_1\ y_1}{(4,-2)} \Leftarrow m = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$

$$y+2 = -\frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x-1$$

مثال اذا كانت العلاقة $x^3+y^3=6xy$ اجب عن السؤالين ① ②

ت 34 ص 134 ① أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y=x$ في الربع الأول.

الكتاب

الحل نجد نقطة التماس ⇐ نعوض $y=x$ بالعلاقة الأولى.

$$x^3+x^3=6x\cdot(x) \Rightarrow 2x^3-6x^2=0$$

$$2x^2(x-3)=0 \Rightarrow \cancel{x=0},\ x=3$$

$$\cancel{y=0} \qquad y=3$$

∴ النقطة هي $(3,3)$

اشتقاق العلاقة ⇐

$$3x^2+3y\cdot y'=6x\cdot y'+y(6)$$

$$3yy'-6xy'=6y-3x^2$$

$$y'(3y-6x)=6y-3x^2$$

$$y'=\frac{6y-3x^2}{3y-6x}=\frac{\cancel{3}(2y-x^2)}{\cancel{3}(y-2x)}=\frac{2y-x^2}{y-2x}$$

$$m=y'(3,3)=\frac{6-9}{3-6}=\frac{-3}{-3}=1$$

المماس هو

$$y-3=1(x-3) \Rightarrow y=x$$

ت 35 ص 134 ② أجد احداثي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

الحل المماس أفقياً ⇐ $y'=0$ ⇐ $\frac{2y-x^2}{y-2x}=0$

$$2y-x^2=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}$$

عوض بالعلاقة:

$$x^3+\frac{x^6}{8}=6x\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$x^3+\frac{x^6}{8}=3x^3$$

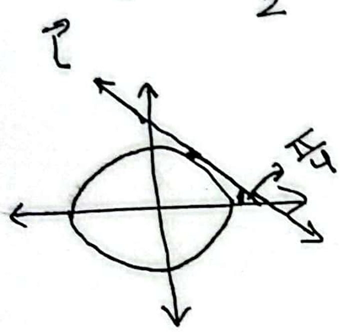
$$2x^3 - \frac{x^6}{8} = 0 \Rightarrow x^3\left(2 - \frac{x^3}{8}\right) = 0$$

إما $x^3 = 0$, $\boxed{x=0}$, $2 - \frac{x^3}{8} = 0 \Rightarrow x^3 = 16$

$$x = \sqrt[3]{16}$$
$$x = 2\sqrt[3]{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \cancel{(0,0)}$$

$$x = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow$$
$$y = \frac{x^2}{2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow (2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) \checkmark$$



س 36 ص 134 الكتاب

يبين الشكل المجاور مماس العلاقة $x^2+y^2=2$ والمستقيم L الذي يمثل مماساً للدائرة (العلاقة) في الربع الأول. اجد معادلة المستقيم.

الحل زاوية ميل المستقيم L ⇐ $\phi = \pi - \frac{\pi}{4}$

$\phi = \frac{3\pi}{4}$ ميل المماس $\tan\phi = L$

$$m_L = \tan\frac{3\pi}{4} = -1 = \frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + 2y(-1) = 0 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow \boxed{x=y}$$

عوض بالعلاقة

$$\therefore x^2+y^2 = 2 \Rightarrow x^2+x^2 = 2$$
$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$\boxed{y=1} \Leftarrow \boxed{x=1}$

$1^2+y^2 = 2$

$y^2 = 1$

$(1,1) \Leftarrow y = 1$

المماس $y - 1 = -1(x-1)$

$y = -x$

معادلة المماس

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية :

مثال اذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ؟؟

الحل

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x^2 = 6y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

نشتق مرة أخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2 \cdot \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{\frac{2xy^2}{y} - \frac{x^4}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

مثال اذا كان $xy + y^2 = 2x$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y) = 2-y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

نشتق مرة ثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(-\frac{dy}{dx}) - (2-y)(1+2\frac{dy}{dx})}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y) * \frac{-(2-y)}{x+2y} - (2-y)(1+2\cdot\frac{2-y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+2y)(y-2)}{x+2y} + \frac{(y-2)}{1} + -\frac{2(2-y)^2}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(y-2)+(y-2)(x+2y)-2(y-2)^2}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{(y-2)\left(x+2y+x+2y-2(y-2)\right)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{(y-2)(2x+4y-2y+4)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{(y-2)(2x+2y+4)}{(x+2y)^3}$$

س 21 ص 133

اذا كان $x+y=\sin y$ اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل

$$1+y' = y'\cos y$$

$$y'\cos y - y' = 1 \Rightarrow y'(\cos y - 1) = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y - 1}$$

$$y'' = \frac{-1(-\sin y \cdot y')}{(\cos y-1)^2} = \frac{\sin y \cdot \frac{1}{\cos y - 1}}{(\cos y - 1)^2}$$

$$\therefore y'' = \frac{\sin y}{(\cos y - 1)^3}$$

س 23 ص 133

اذا كان $xy + e^y = e$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل

$$x\frac{dy}{dx} + y + \frac{dy}{dx}e^y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x+e^y) = -y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+e^y) * -\frac{dy}{dx} - - y\left(1+ \frac{dy}{dx} e^y\right)}{(x+e^y)^2}$$

$$= \frac{(x+e^y) * \frac{y}{x+e^y} + \frac{y}{1} + \frac{-y^2 e^y}{x+e^y}}{(x+e^y)^2}$$

$$= \frac{y(x+e^y) + y(x+e^y) - y^2 e^y}{(x+e^y)^3}$$

$$= \frac{2y(x+e^y) - y^2 e^y}{(x+e^y)^3}$$

<u>المشتقة الثانية للعلاقة الوسيطية</u>

<u>مثال</u> جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t=1$

علماً أن $y = t^4 - 8t^2$, $x = t^3 + 3t^2$

<u>الحل</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t} = \frac{\cancel{t}(4t^2-16)}{\cancel{t}(3t+6)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(t^2-4)}{3(t+2)} = \frac{4}{3}\,\frac{(t-2)\cancel{(t+2)}}{\cancel{t+2}}$$

$$= \frac{4}{3}(t-2)$$

اشتق مرة ثانية ضمنياً بالنسبة للمتغير t

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}\,\frac{dt}{dx} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3t^2+6t}\right) = \frac{4}{9t^2+18t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{9+18} = \frac{4}{27}$$

س 32 ص 134 الكتاب

اذا كان $x = \sin t$ ، $y = \cos t$ اوجد $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

الحل

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sec^2 t * \frac{1}{\cos t}$$

$$= -\sec^2 t \cdot \sec t = -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3 \frac{\pi}{4} = -(\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$$

س 33 ص 134 اذا كان

$y = t^3 + t + 1$ ، $x = e^{-t}$ جد $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

الحل

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}} = \underbrace{e^{t}}_{1}\underbrace{(-3t^2-1)}_{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{t}\left(-6t\frac{dt}{dx}\right) + e^{t}(-3t^2-1)\frac{dt}{dx}$$

$$= -6te^{t}(e^{t})(-3t^2-1) + e^{t}(-3t^2-1) * e^{t}(-3t^2-1)$$

$$= -6te^{2t}(-3t^2-1) + e^{2t}(-3t^2-1)^2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = 0 + 1(0-1)^2 = 1(1) = 1$$

مهارات التفكير العليا ص 134

اذا كان : $x^2-y^2=1$ أجب عن الأسئلة الاربعة الآتية :-

س 37 جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2x=2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

س 38 يمكن التعبير عن العلاقة $x^2-y^2=1$ بالمعادلة الوسيطية

$y=\tan t$, $x=\sec t$ حيث $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

استعمل هذه الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$$

س 39 اثبت ان المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ لنا تجين في السؤالين السابقين متكافئان .

الحل من نص السؤال $y=\tan t$, $x=\sec t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}=$$ نفس اجابة س 37

س 40 أجد احداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة يساوي 2 .

الحل

$$\frac{dy}{dx}=2 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{x=2y}$$

نعوض بالعلاقة

$$x^2-y^2=1 \Rightarrow 4y^2-y^2=1 \Rightarrow 3y^2=1$$

$$y^2=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

∴ النقاط $(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})$

س41 ص134 اذا مثل L اي مماس لمنحنى المعادلة :

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ حيث k عدد حقيقي موجب . أثبت ان

مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم L يساوي k .

الحل

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}}=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

اذا كانت نقطة التماس (x_1, y_1)

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

المقطع y $\Leftarrow$ عندما $x=0$

$$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} * -x_1$$

$$y=\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+y_1 \text{ ——— } \boxed{1}$$

المقطع x عندما $y=0$

$$0-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

$$x-x_1=y_1\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{y_1}} \Rightarrow x=\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{x_1}+x_1 \text{ ——— } \boxed{2}$$

نجمع $\boxed{1}$ مع $\boxed{2}$

$$x+y=\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1$$

$$=y_1+2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1$$

$$=(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1})^2=(\sqrt{k})^2=k$$

ملاحظه ميل المستقيم $ax+by+c=0$ هو $\frac{-a}{b}$

او ميل المستقيم هو $\frac{dy}{dx}$ ⇐ $a+b\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-a}{b}$

مثال ميل $3x+2y=2$ هو $-\frac{3}{2}$

ميل $2y-6x+1=0$ هو $--\frac{6}{2}=3$

ملاحظه لتوازي مستقيمان اذا كان ميلاهما متساويان .

26 ص 133 س

احد احداثي نقطة على منحنى $x+y^2=1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x+2y=0$

الحل اشتقه $x+y^2=1$

$\boxed{1}$ — $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$ ⇐ $1+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\boxed{2}$ — ميل المستقيم $x+2y=0$ هو $-\frac{1}{2}$

المماس // المستقيم .

ميل المماس = ميل المستقيم

$\frac{-1}{2y}=\frac{-1}{2} \Rightarrow 2y=2$

$\boxed{y=1}$ عوض بالعلاقه ⇐ $x+1^2=1$

$x=0$

∴ نقطة التماس هي $(0,1)$

س 25 اثبت ان لمنحنى العلاقة $3x^2+2xy+y^2=6$ مماسين أفقيين ثم أجد أحداثيي نقطتي التماس .

الحل

$$6x+2x\frac{dy}{dx}+2y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

بما ان المماس أفقي $\Leftarrow \frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore 6x+\cancel{2x(0)}+2y+\cancel{2y(0)}=0$$

$$6x+2y=0 \Rightarrow 2y=-6x$$

$\boxed{y=-3x}$ نعوض بالعلاقة الأصلية

$$3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6$$

$$3x^2-6x^2+9x^2=6$$

$$6x^2=6 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$$

النقطة الأولى $x=1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow (1,-3)$

النقطة الثانية $x=-1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (-1,3)$

بما انه يوجد نقطتين عند كل منها الميل = صفر .

$\therefore$ يوجد مماسين أفقيين

س 27 جد احداثيي نقطة (نقاط) على منحنى $y^3=x^2$

بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم

$y+3x-5=0$ حيث $y\neq 0$

الحل

نشتق $y^3=x^2 \Rightarrow$

$$3y^2\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}$$

ميل المستقيم $y+3x-5=0$

هو $-3=\frac{-3}{1}$

الماس عمودي على المستقيم $y+3x-5=0$

ميل المماس * ميل العمودي = -1

$$\frac{2x}{3y^2} * -3 = -1$$

$$\frac{2x}{y^2} = 1 \Rightarrow \boxed{2x = y^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y^2}{2}}$$

نعوض بالعلاقة

$$y^3 = x^2$$

$$y^3 = \frac{y^4}{4} \Rightarrow 4y^3 - y^4 = 0$$

$$y^3(4-y) = 0$$

$$\boxed{y=0} \text{ و } \boxed{y=4}$$

$$\cancel{y=0 \Rightarrow x=0}$$

$$\cancel{(0,0)}$$

$y \neq 0$ مرفوض

$$y = 4 \Rightarrow x = \frac{16}{2} = 8$$

هي النقطة

$$(8,4)$$

س 28 اذا كان $x^2+y^2=25$ اثبت ان $y'' = \frac{-25}{y^3}$

الحل

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{y(-1) - -x \cdot y'}{y^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{y}{1} + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-25}{y^3}$$

س 29 ص 133 اذا كان $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ حيث $x>0 , y>0$

اثبت ان $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

الحل

$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ نربع الطرفين .

$$\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}=100$$

$$\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}=100$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=98 \quad / \text{ اشتقه}$$

$$\frac{y(1)-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}+\frac{x\frac{dy}{dx}-y(1)}{x^2}=0$$

$$\frac{x^2y-x^3\frac{dy}{dx}}{x^2y^2}+\frac{xy^2\frac{dy}{dx}-y^3}{x^2y^2}=0$$

$$x^2y-x^3\frac{dy}{dx}+xy^2\frac{dy}{dx}-y^3=0$$

$$xy^2\frac{dy}{dx}-x^3\frac{dy}{dx}=y^3-x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}(xy^2-x^3)=y^3-x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3-x^2y}{xy^2-x^3}=\frac{y\cancel{(y^2-x^2)}}{x\cancel{(y^2-x^2)}}=\frac{y}{x}$$

#

س30 أوجد جميع النقاط على منحنى الدائرة $x^2+y^2=100$

التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

الحل

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{x}{y}=\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{4}{3}x}$$

عوض بالعلاقة الاصلية

$$x^2+\frac{16}{9}x^2=100$$

$$\frac{25}{9}x^2=100 \Rightarrow x^2=100 * \frac{9}{25}$$

$$x^2=36 \Rightarrow x=\mp 6$$

$$x=6 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}(6)=-8 \Rightarrow (6,-8)$$

$$x=-6 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}(-6)=8 \Rightarrow (-6,8)$$

س31 ص133 اذا كانت $y=\ln x$ حيث $x>0$

اثبت بالاشتقاق الضمني ان $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

الحل

اشتقه

$$y=\ln x \Rightarrow x=e^y$$

$$1=\frac{dy}{dx}e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

س16 ص28 كتاب التمارين

أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة $x^2+xy+y^2=7$ مع المحور x ثم اثبت ان مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

الحل تقاطع المحور x هو عندما $y=0$

$$x^2+x(0)+0=7 \Rightarrow x=\mp\sqrt{7}$$

∴ النقطتان هما $(\sqrt{7},0)$ و $(-\sqrt{7},0)$

اشتقه العلاقه

$$x^2+xy+y^2=7$$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y-2x}{x+2y}$$

ميل المماس الأول $=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)}=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=-2$

ميل المماس الثاني $=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{7},0)}=\frac{2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}}=-2$

بما ان الميلان متساويان ⇐ المماسان متوازيان

س15 ص 28 كتاب التمارين

أجد احداثيي النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى العلاقة

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ التي يكون عندها ميل المماس 0.5- .

الحل

$$\frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{9}=0$$

الميل $= -\frac{1}{2}$

$y' = -\frac{1}{2}$

$$\frac{x}{2}+\frac{2y(-\frac{1}{2})}{9}=0$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{9}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{9}$$

$$\boxed{y=\frac{9}{2}x}$$ عوض بالعلاقة

$$\frac{x^2}{4}+\frac{81}{4}\frac{x^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9}{4}x^2=1 \Rightarrow \frac{10}{4}x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{2}{5}$$

$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ بالربع الأول .

$$y=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$y=\frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{9}{\sqrt{10}}\right) \Leftarrow$$

بالربع الأول .

س14 جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x+y)^3=x^2+y$

عند النقطة $(1,0)$

الحل عوض $\overset{x\ y}{(1,0)}$

لايجاد الميل

$$3(x+y)^2(1+y')=2x+y'$$

$$3(1+0)^2(1+y')=2(1)+y'$$

$$3+3y'=2+y' \Rightarrow 2y'=-1$$

$y'=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ ميل العمود $=2 \Rightarrow y-0=2(x-1)$

ميل المماس

$y=2x-2$

معادلة العمودي .