الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة: التفاضل و تطبيقاته

الدرس الخامس: المعدلات المرتبطة بالزمن

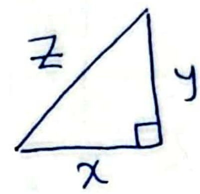
إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

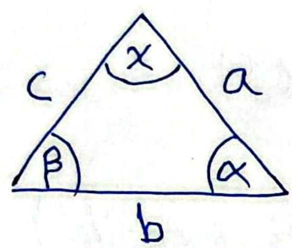
0777298115

مراجعة ⊛ فيثاغورس ← العلاقة بين اضلاع المثلث القائم.



$$x^2+y^2=z^2$$

⊛ قانون جيب التمام ($\cos x$) ← العلاقة بين اضلاع اي مثلث.



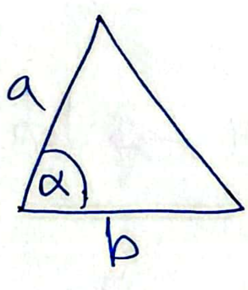
$$a^2=c^2+b^2-2cb\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos x$$

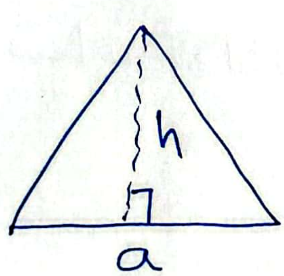
⊛ قانون الجيب ⇐ $\dfrac{\sin\beta}{a}=\dfrac{\sin x}{b}=\dfrac{\sin\alpha}{c}$

⊛ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب اي ضلعين * sin الزاوية المحصورة



$$A=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

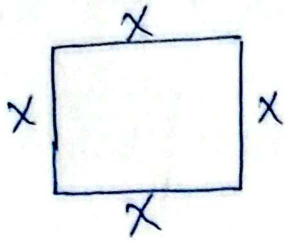
⊛ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ * القاعدة * الارتفاع



$$A=\frac{1}{2}ah$$

a : القاعدة

h : الارتفاع

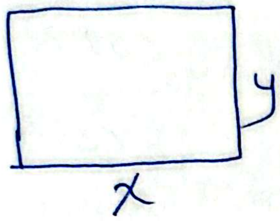


* مساحة المربع = $(\text{الضلع})^2 = x^2$

$A = x^2$

المحيط $= 4x$

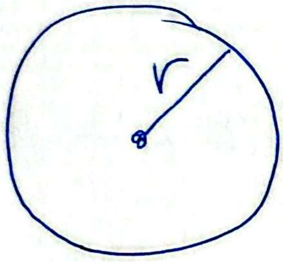
* مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعدية



$A = xy$

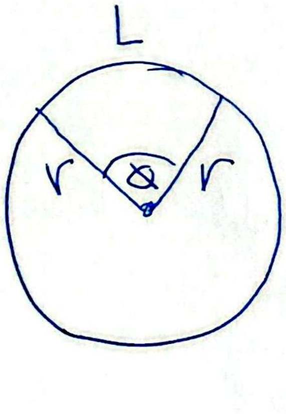
المحيط $(L) = 2x + 2y$

* الدائرة



المساحة $A = \pi r^2$

المحيط $L = 2\pi r$



* طول قوس القطاع الدائري $= L$

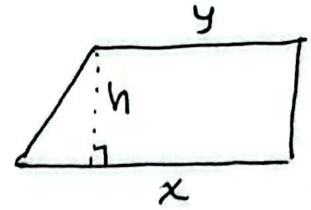
$L = r\phi$

مساحة القطاع الدائري (A)

$A = \frac{1}{2} r L$

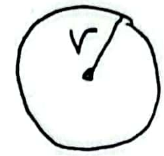
$A = \frac{1}{2} r^2 \phi$

* مساحة شبه المنحرف ⇐ $A = \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) * الارتفاع .



$$A = \frac{1}{2}(x+y)\cdot h$$

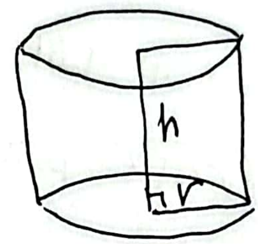
* الكرة :



حجم الكرة ⇐ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المساحة لسطح الكرة : $A = 4\pi r^2$

* الاسطوانة



حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة * الارتفاع

$$V = \pi r^2 h$$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة * الارتفاع

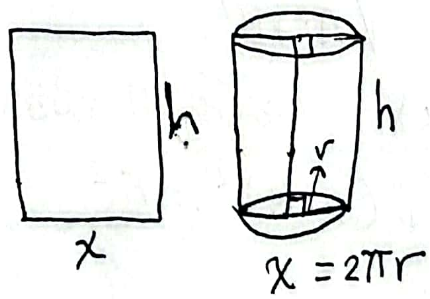
$$A = 2\pi r h$$

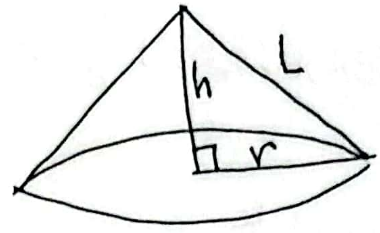
المساحة الكلية للاسطوانة = المساحة الجانبية + مساحة دائرتين

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

يمكن الحصول على الاسطوانة ⇐ من مستطيل يدور دورة كاملة حول أحد بعدي الاسطوانة

* يمكن الحصول على اسطوانة من ثني مستطيل .
احد بعديه يكون قاعدة الاسطوانة والبعد الآخر الارتفاع .





* المخروط :

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ (مساحة القاعدة) * الارتفاع .

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

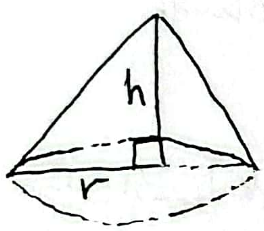
L = راسم المخروط .

المساحة الجانبية للمخروط هي $A = \pi r L = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$A = \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi r^2$$

* المخروط : مثلث قائم يدور حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة



* المسافة بين نقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

* احداثيات منتصف قطعة مستقيمة $\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)$

* بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم $Ax+By+C=0$

هو

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

* معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r

هي

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

المعدلات المرتبطة بالزمن :

مسائل كلامية تحل بالاشتقاق الضمني بالنسبة للزمن

$\frac{dy}{dx}$ معدل تغير y بالنسبة لـ x .

$\frac{dy}{dt}$ معدل تغير y بالنسبة للزمن t

- اذا كان الحجم (V) يتناقص بمعدل $3\ cm^3/sec$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = -3$$

- اذا كان الضلع x يزداد بمعدل $5\ cm/sec$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 5$$

خطوات حل المسألة

1. قراءة المسألة جيداً وفهمها ورسم شكلاً توضيحياً ان امكن
2. تحديد المتغيرات والثوابت بالمسألة .
3. ايجاد علاقة تربط بين المعطيات والمطلوب .
4. يمكن التخلص من متغير بدلالة المتغير الآخر عن طريق علاقة مساعدة .
5. نشتق ضمنياً بالنسبة للزمن
6. نعوض المعطيات ثم نجد المطلوب .

مثال يزداد أحد بعدي مستطيل بمعدل $3\ cm/sec$ بينما يتناقص البعد الآخر بمعدل $2\ cm/sec$

1. اوجد معدل تغير مساحته عندما يكون بعده المتزايد $8\ cm$ والبعد المتناقص $6\ cm$
2. اوجد معدل تغير طول قطره عند تلك اللحظة .

الحل

$\frac{dy}{dt} = 3 \Leftarrow y =$ البعد المتزايد

$\frac{dx}{dt} = -2 \Leftarrow x =$ البعد المتناقص

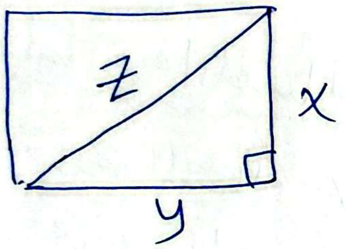
① $A =$ المساحة ، $\frac{dA}{dt}$?? عندما $x = 6$, $y = 8$

$$A = x \cdot y$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= 6 * 3 + 8 * -2 = 2 \ cm^2/sec$$

② $Z =$ القطر



$\frac{dz}{dt}$?? $x = 6$, $y = 8$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

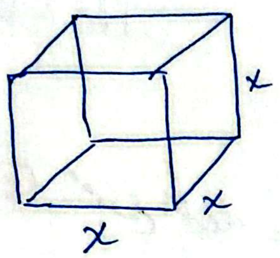
$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2(6)(-2) + 2(8)(3)}{2\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{-24 + 48}{2 * 10} = \frac{24}{20}$$

$$= \frac{6}{5} \ cm/sec$$

مثال: تعرض مكعب من الثلج للحرارة بانتظام. يتناقص
حجمه بمعدل $2\ cm^3/sec$. اوجد معدل تغير مساحته الكلية
عندما يكون طول ضلعه $(10)\ cm$.



الحل

$V =$ حجم المكعب

$$\frac{dV}{dt} = -2\ cm^3/sec$$

المساحة الكلية $A = 6x^2$

$\frac{dA}{dt}$?? عندما $x=10$

$V = x^3$ نشتق

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-2 = 3(10)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2}{300}$$

نعوض *

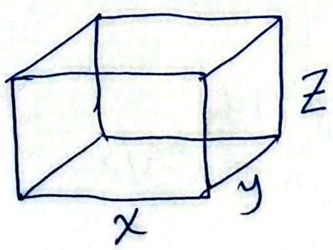
$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 12(10) \frac{dx}{dt} \quad (*)$$

$$\frac{dA}{dt} = 120 * \frac{-2}{300} = 12 * \frac{-2}{30} = -\frac{12}{15} = \frac{-4}{5}\ cm^2/sec$$

مراجعة

(*) حجم الموشور الرباعي (متوازي المستطيلات)



$$V = x \cdot y \cdot z$$

$A =$ المساحة الجانبية

$$A = 2xz + 2yz$$

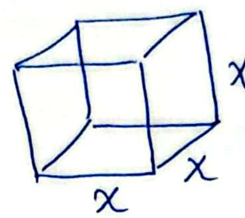
(*) مجموع أحرفه $= 4x+4y+4z$

المساحه الكليه = A

$A =$ القاعدتين + الجانبية

$$A = 2xz + 2yz + 2xy$$

* المكعب



$V = x^3$

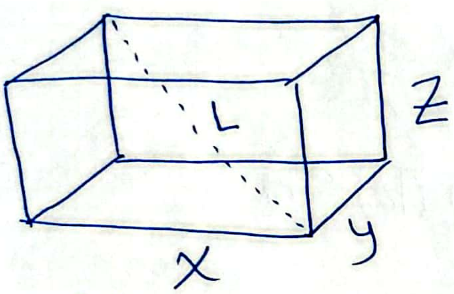
A الجانبية $= 4x^2$

A الكلية $= 6x^2$

* مجموع الأحرف = 12 حرف

$= 12x$

* قطر متوازي المستطيلات $= L$



$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال قرص دائري يتمدد بانتظام بحيث يزداد طول نصف قطره بمعدل 3 cm/sec اوجد معدل تمدد كل من مساحته ومحيطه عندما يكون نصف قطره 15 cm

الحل

$r =$ نصف القطر $\Leftarrow \frac{dr}{dt} = 3 \quad , \quad r = 15$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi(15) * 3$$

$$= 90\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

المحيط $= L = 2\pi r$

$$\frac{dL}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt} = 2\pi(15)$$

$$= 30\pi \text{ cm/s}$$

مثال ينفخ بالون بالهواء بحيث يزداد حجمه بمعدل $20\ cm^3/sec$ أوجد معدل تغير مساحة سطحه عندما يكون نصف قطره $(30)\ cm$

الحل V = حجم البالون $\Leftarrow \frac{dV}{dt} = 20$

$\frac{dA}{dt}$?? عندما $r = 30$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$20 = 4\pi (30)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\cancel{20}^{1}}{4\pi(\cancel{900})_{2}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{180\pi} = \frac{dr}{dt}$$

(*) نعوض

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi (30) \cdot \frac{dr}{dt}$$

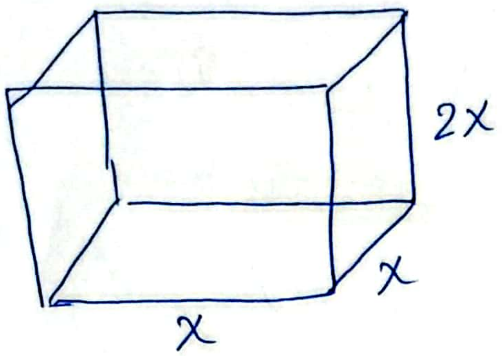
$$\frac{dA}{dt} = 240\pi \frac{dr}{dt} \quad (*)$$

$$\frac{dA}{dt} = 240\cancel{\pi} * \frac{1}{180\cancel{\pi}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}\ cm^2/sec$$

مثال صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه مثلي طول ضلع القاعدة ، اذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل $2\ cm/sec$ اوجد معدل تغير مساحته الجانبية ومعدل تغير حجمه عندما يكون ضلع القاعدة هو $6\ cm$.

الحل



x = طول ضلع القاعدة

$\frac{dx}{dt} = 2$ cm/sec

① $\frac{dA}{dt}$?? $x = 6$ cm

② $\frac{dV}{dt}$?? $x = 6$ cm

① $A = 2 * x * 2x + 2 * x * 2x$

$A = 8x^2$

$\frac{dA}{dt} = 16x \frac{dx}{dt} = 16 * 6 * 2$

$= 96 * 2 = 192$ cm²/s

② $V = x * x * 2x = 2x^3$

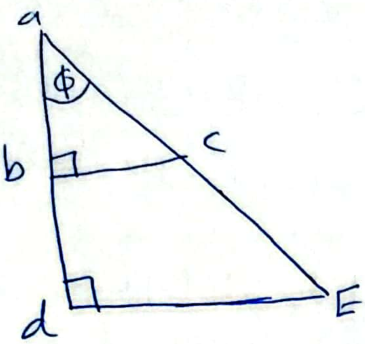
$\frac{dV}{dt} = 6x^2 \frac{dx}{dt}$

$= 6(6)^2 * 2$

$= 2 * 36 * 2$

$= 72 * 2 = 144$ cm³/s

* قانون الظل ← عندما تكون زاوية مشتركة في مثلثين قائمين .



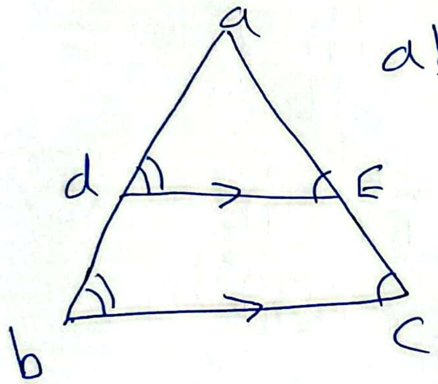
$$\tan\phi = \frac{bc}{ab} = \frac{dE}{ad}$$

$$\sin\phi = \frac{bc}{ac} = \frac{dE}{aE}$$

$$\cos\phi = \frac{ab}{ac} = \frac{ad}{dE}$$

* تشابه المثلثات ⇐ اذا كانت الزوايا المتناظره متساوية تكون الاضلاع المتناظره متناسبه .

المثلث adE يشبه المثلث abc



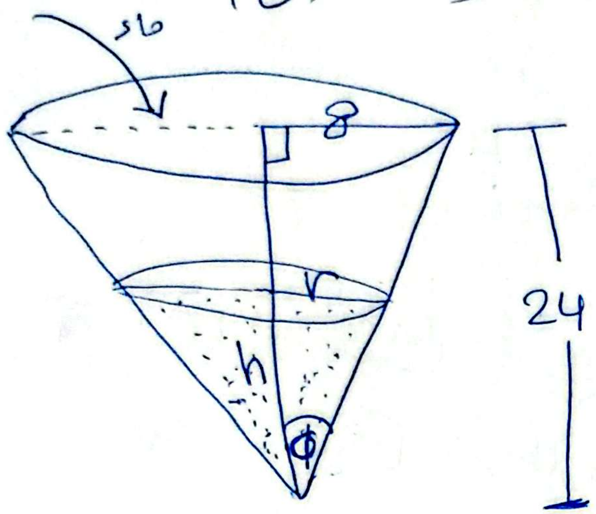
① $$\frac{da}{ba} = \frac{dE}{bc} = \frac{Ea}{ca}$$

② $$\frac{\text{قاعدة الصغير}}{\text{قاعدة الكبير}} = \frac{\text{ارتفاع الصغير}}{\text{ارتفاع الكبير}} .$$

* في حالة وجود مخروط داخل مخروط
// // // // اسطوانه داخل مخروط .
// // // // مثلث داخل مثلث .
// // // // مستطيل داخل مثلث

العلاقه الحاكمه هي تشابه المثلثات او الظل .

مثال: ينسكب الماء داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $(8)\,cm$ وارتفاعه $(24)\,cm$ ورأسه للأسفل بمعدل $3\,cm^3/sec$ اوجد معدل تغير ارتفاع الماء داخل المخروط عندما يكون ارتفاع الماء بالمخروط هو $(6)\,cm$



الحل: شكل الماء داخل المخروط هو مخروط آخر نصف قطره r وارتفاعه h.

$V =$ حجم الماء (المخروط الصغير)

$$\frac{dV}{dt} = 3\ cm^3/sec$$

المطلوب: $\frac{dh}{dt}$?? عندما $h=6$

العلاقة المساعدة

$$\tan\phi = \frac{r}{h} = \frac{8}{24}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

نتخلص من r

نعوض (*)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ —— } (*)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{3}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi * \frac{1}{9}h^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$3 = \frac{1}{9}\pi (36)\frac{dh}{dt}$$

$$3 = 4\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{3}{4\pi} = \frac{dh}{dt}$$

مثال

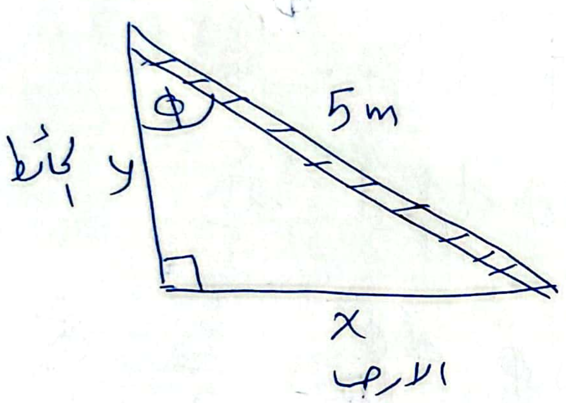
سلم طوله (5) m يرتكز على حائط . أخذ السلم بالانزلاق . اذا كان طرف السلم السفلي يبتعد عن الحائط بمعدل $(\frac{1}{2})\, m/min$ اوجد :-

① معدل انخفاض طرف السلم العلوي على الحائط عندما يكون الطرف العلوي على ارتفاع (3)m عن الأرض .

② اوجد معدل تغير مساحة المثلث المكون من السلم والحائط والأرض عند تلك اللحظة .

③ اوجد معدل تغير الزاوية المحصورة بين السلم والحائط عند تلك اللحظة .

الحل



$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\ m/min$$

① $\frac{dy}{dt}$?? عندما $y = 3$

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - x^2$$
$$y = \sqrt{25 - x^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\cancel{2}x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4 * \frac{1}{2}}{\sqrt{25-16}}$$
$$= \frac{-2}{3}\ m/min$$

عندما $y = 3$

$$3^2 + x^2 = 5^2$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4$$

$y=3$ عندما $\frac{dA}{dt}$??? (2)

$$A=\frac{1}{2}xy$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4*\frac{-2}{3}+3*\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{8*2}{3*2}+\frac{3*3}{2*3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}*-\frac{7}{6}=\frac{-7}{12}\ m^2/min$$

$\sin\phi=\frac{x}{5}$, $\frac{d\phi}{dt}$?? (3)

$$\cos\phi\frac{d\phi}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}}{5}$$

$$\cos\phi\frac{d\phi}{dt}=\frac{\frac{1}{2}}{5} \quad (*)$$

$x=4 \Leftarrow y=3$ عندما

$$\cos\phi=\frac{4}{5}$$

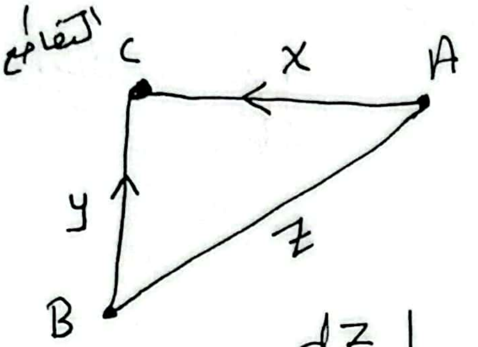
(*) عوض

$$\frac{4}{5}\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{10}*\frac{5}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\ Rad/min$$

مثال تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة (80) km/h وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة (100) km/h وهما تتجهان نحو تقاطع مروري . أوجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد (0.3) km و 0.4 km على الترتيب من التقاطع .



الحل x = المسافة بين A ، C

y = المسافه بين B و C

z = المسافه بين A ، B .

x ، y ، z متغيرات .

$$\frac{dx}{dt} = -80 \ , \quad \frac{dy}{dt} = -100 \quad \text{المطلوب} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{x=0.3\\ y=0.4}}$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2+(0.4)^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-48 + -80}{2\sqrt{0.25}} = \frac{-128}{2(0.5)} = -128 \text{ km/h}$$

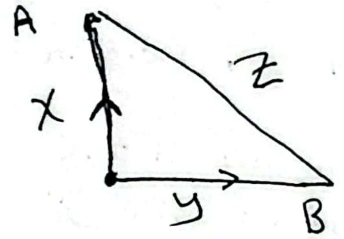
السيارتان تقتربان من بعضهما بمعدل (100) km/h

مثال تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها . بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعه 45 km/h واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة (40) km/h أوجد معدل تغير البعد بين السيارتين A ، B بعد ساعتين من انطلاقهما .

الحل ملاحظة السرعه = $\frac{\text{المسافه}}{\text{الزمن}}$ ⇐ المسافه = السرعه * الزمن

$$t * \frac{dx}{dt} = x$$

$$t * \frac{dy}{dt} = y$$



$\frac{dx}{dt} = 45 \Leftarrow 45 = A$ سرعة

$\frac{dy}{dt} = 40 \Leftarrow 40 = B$ سرعة

$x = 2(45) = 90 \Leftarrow$ بعد (2) ساعة

$y = 2(40) = 80$

المطلوب $\frac{dz}{dt}$

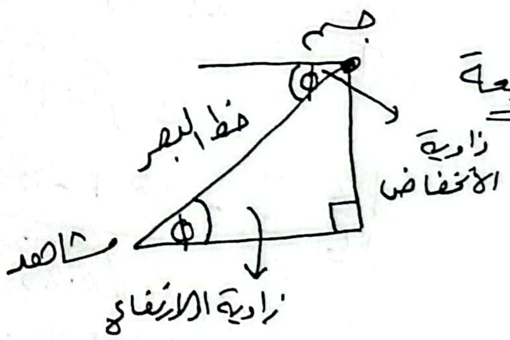
$$Z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2 * \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{2(90)(45) + 2(80)(40)}{2\sqrt{90^2+80^2}}$$

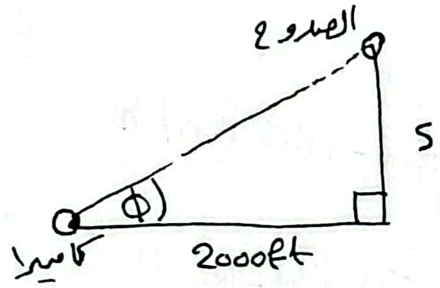
$$\frac{dZ}{dt} = \frac{725}{\sqrt{145}} \text{ Km/h}$$

مراجعة *



مثال رصدت كاميرا مثبتة على الارض لحظة اطلاق صاروخ في راسياً للأعلى وقد أعطي موقعه عن الارض حسب الاقتران: $S(t) = 50t^2$ ، S: بالاقدام t الزمن بالثواني اذا كانت الكاميرا تبعد 2000 ft عن منصة الاطلاق اجد معدل تغير زاوية الارتفاع للصاروخ بعد (10) ثواني

الحل



ϕ زاوية الارتفاع.

$$\tan\phi = \frac{S}{2000} = \frac{50t^2}{2000}$$

$$\tan\phi = \frac{t^2}{40}$$

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{2t}{40} = \frac{t}{20}$$

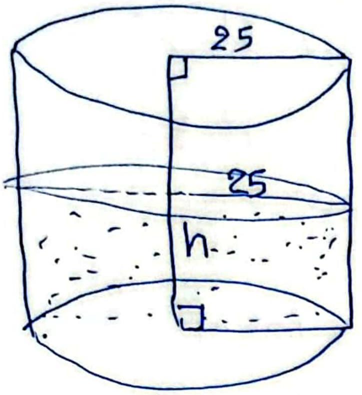
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{t}{20\sec^2\phi} = \frac{10}{20 \times \frac{29}{4}} = \frac{2}{29}$$

عندما $t = 10 \Rightarrow \tan\phi = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$

$1 + \tan^2\phi = \sec^2\phi \Rightarrow 1 + \frac{25}{4} = \sec^2\phi \Rightarrow \frac{29}{4} = \sec^2\phi$

كتف

مثال تصب حنفية الماء في وعاء اسطواني الشكل نصف قطره (25) cm وبمعدل $2\pi\ cm^3/s$ ① جد معدل التغير في ارتفاع الماء بالاسطوانة . ② جد معدل تغير المساحة الجانبية على اي لحظة



الحل ① V = حجم السائل (الاسطوانة الداخلية)

المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|$, $\frac{dv}{dt} = 2\pi$

$$V = \pi(25)^2 h = 625\pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = 625\pi \frac{dh}{dt}$$

$$2\cancel{\pi} = 625\cancel{\pi} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{625}\ cm/sec$$

الحل ②

$$A = 2\pi(25)h$$

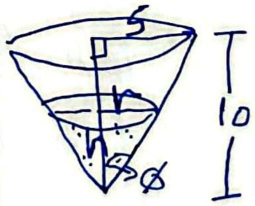
$$A = 50\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 50\pi \frac{dh}{dt}$$

$$= 50\pi * \frac{2}{625} = \frac{100\pi}{265}$$

مثال خزان ما على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وارتفاعه (10) cm ونصف قطر قاعدته 5 cm صب الماء في الخزان بمعدل $\pi\ m^3/min$ ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه 8 m .

الحل



$$\frac{dv}{dt} = \pi$$

المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ——— } (*)$$

$$\tan\phi = \frac{r}{h} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore r = \frac{h}{2}$$ عوض في (*)

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{12}\pi h^3$$

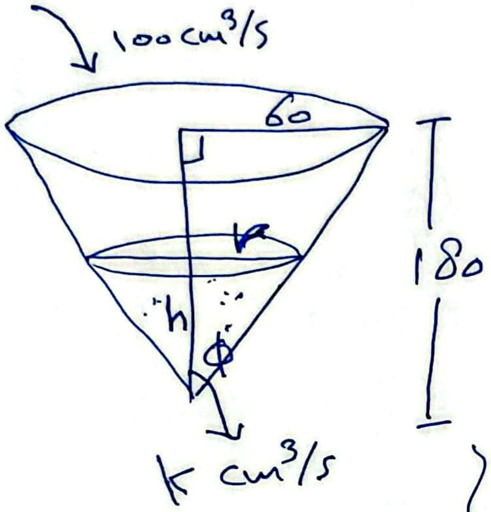
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$1\cancel{\pi} = \frac{1}{4}\cancel{\pi}(64)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\frac{64}{4}} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}\ cm/min$$

مثال خزان ماء مخروطي الشكل نصف قطر قاعدته (60) cm وارتفاعه (180) cm رأسه للأسفل . يتسرب منه الماء من فتحة في رأسه بمعدل (K) cm^3/s ويصب فيه الماء بواسطة حنفية بمعدل (100) cm^3/s اذا كان معدل تغير ارتفاع الماء بالمخروط هو $\frac{3}{5\pi}$ cm/sec عندما يكون ارتفاع الماء بالمخروط (30) cm جد الثابت K



الحل

$$\frac{dV}{dt} = 100 - K$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{5\pi} \,,\; h = 30$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{—} (*)$$

$$\tan\phi = \frac{60}{180} = \frac{r}{h}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{r}{h}$$

نعوض في (*) $r = \frac{h}{3}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{9} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$100 - K = \frac{1}{9}\pi (900) \cdot \frac{3}{5\pi}$$

$$100 - K = 100 \cancel{\pi} * \frac{3}{5\cancel{\pi}} = 60$$

$$K = 100 - 60 = 40 \; cm^3/s$$

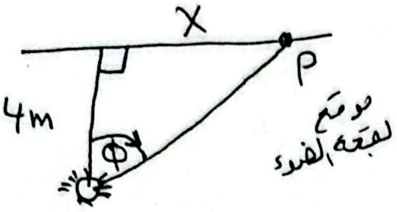
مثال بالمثال السابق جد معدل تغير مساحة السطح العلوي للسائل عند تلك اللحظة

الحل مساحة السطح العلوي = دائرة ⇐ $A = \pi r^2 = \pi \frac{h^2}{9}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi}{9} h \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9}\cancel{\pi}(30) * \frac{3}{5\cancel{\pi}} = 4$$

مثال يدور مصباح مثبت بالارض حول نفسه (3) دورات في الدقيقة ويبعد مصباح (4)m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد 8 m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار اثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة.

الحل



$$\frac{d\phi}{dt} = 3(2\pi) = 6\pi$$

$$\tan\phi = \frac{x}{4}$$

$$x = 4\tan\phi$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt}$$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$ المطلوب

$$\tan\phi = \frac{8}{4} = 2$$

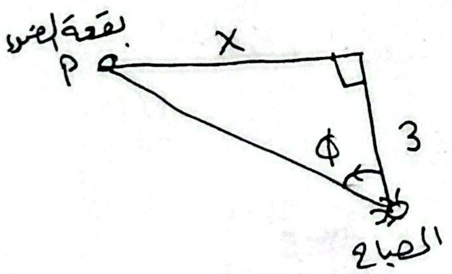
$$1+\tan^2\phi = \sec^2\phi \Rightarrow 1+2^2 = \sec^2\phi$$

$$5 = \sec^2\phi$$

$$\frac{dx}{dt} = 4(5)(6\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\pi$$

مثال يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه (4) دورات في الدقيقة ويبعد مسافة 3 (m) عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد 1m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة من هذه النقطة



$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$ المطلوب ، $\frac{d\phi}{dt} = 8\pi$ rad/m

$\frac{d\phi}{dt} = -8\pi$ rad/m

مقتربة

$$\tan\phi = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\phi$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt}$$

$$x = 1$$

$$\tan\phi = \frac{1}{3}$$

$$1+\tan^2\phi = \sec^2\phi$$

$$\frac{10}{9} = \sec^2\phi$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \times \frac{10}{9} \times -8\pi$$

$$= -\frac{80}{3}\pi \text{ m/m}$$

مثال: اذا زاد حجم مكعب لمعدل 24 cm^3/min وزادت مساحة سطحه لمعدل 12 cm^2/min جد طول ضلعه بتلك اللحظة.

الحل

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$24 = 3x^2\frac{dx}{dt} \quad —(1)$$

$$A = 6x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

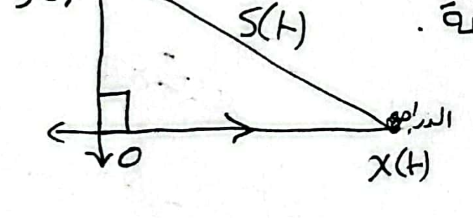
$$12 = 12x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{x\frac{dx}{dt} = 1}$$

عوض (1)

$$24 = 3x \cdot x\frac{dx}{dt}$$

$$24 = 3x(1) \Rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

مثال: يرتفع بالون رأسياً فوق سطح الأرض (طريق مستقيم أفقي) لمعدل 1 ft/s ومن اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق الطريق. مرّت أسفله دراجة تتحرك بسرعة 17 ft/s كما في الشكل المجاور أوجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد (3) ثوان من هذه اللحظة.



الحل: عندما $y = 65$ ، $\frac{dy}{dt} = 1$

$$\frac{dx}{dt} = 17 \text{ ft/s}$$

المطلوب: $\frac{ds}{dt}$?? عندما $t = 3$ sec

$x = 17t$

$y = 65 + 1t$

الزمن × السرعة = المسافة

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s = \sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65+t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}} = \frac{17(3)(17) + (65+3)}{\sqrt{(51)^2 + (68)^2}} = \frac{935}{\sqrt{7225}}$$

$$= \frac{935}{85} = 11$$