الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الرابعة: الأعداد المركبة

الدرس الأول: الأعداد المركبة

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

الأعداد المركبة : $\mathbb{C}$

مثال حل المعادلة $x^2+1=0$ ؟؟

الحل $x^2=-1 \Leftarrow x=\mp\sqrt{-1}$ ∴ لا يوجد حل عدد حقيقي .

$$x=\mp i$$

i وحدة تخيلية حيث $i=\sqrt{-1}$.

∴ كل من i ، $-i$ يعتبر جذر تربيعي للعدد -1 .

i = يسمى الجذر الرئيسي للعدد -1 .

مثال جد الجذر الرئيسي للأعداد .

① $\sqrt{-4}$ ② $\sqrt{-64}$ ③ $\sqrt{-27}$

الحل

① $\sqrt{-4}=\sqrt{4*-1}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$

② $\sqrt{-64}=\sqrt{64*-1}=\sqrt{64}*\sqrt{-1}=8i$

③ $\sqrt{-27}=\sqrt{-1*9*3}=\sqrt{-1}.\sqrt{9}.\sqrt{3}=3i\sqrt{3}$

ملاحظة يسمى $\sqrt{-k}$ حيث k عدد حقيقي موجب بعدد تخيلي .

$\sqrt{-6}$ عدد تخيلي $\Leftarrow$ $i\sqrt{6}$ عدد تخيلي .

$\sqrt{-9}=3i \Leftarrow$ عدد تخيلي .

$2i\sqrt{5} \Leftarrow$ عدد تخيلي .

ملاحظة

$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$

$i^3=i^2*i=-i$

$i^4=i^2*i^2=-1*-1=1$

$i^2=-1$

$i^3=-i$

$i^4=1$

⊛ ضرب الاعداد التخيلية ..

① نكتب الاعداد بدلالة i ② نجري الضرب باستعمال خاصتي التبديل والتجميع.

مثال اوجد $\sqrt{-4}*\sqrt{-1}$ ؟؟

الحل
$$\sqrt{-4}*\sqrt{-1} = 2i*i$$
$$= 2i^2 = 2(-1)$$
$$= -2$$

خطأ ✗ لا يجوز

$$\sqrt{-4}*\sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{-4*-1}$$
$$= \sqrt{4}$$
$$= 2$$

ملاحظة
$$\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$$
شرط كل من x, y عدد حقيقي موجب.

وكذلك
$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

مثال اوجد قيمة $\sqrt{-8}*\sqrt{-18}$ ؟؟

الحل
$$\sqrt{4*2*-1}*\sqrt{9*2*-1} =$$
$$2\sqrt{2}\,i * 3\sqrt{2}\,i = 6(2)*i^2$$
$$= 12*-1 = -12$$

مثال اوجد قيمة $3i\sqrt{-16}$

الحل
$$3i\sqrt{16*-1} = 3i*4i$$
$$= 12(-1) = -12$$

مثال جد قيمة i^{19}

الحل
$$i^{19} = i^{18}*i = (i^2)^9*i$$
$$= (-1)^9*i = -i$$

مثال اوجد قيمة i^{232} .

الحل $i^{232} = (i^2)^{116} = (-1)^{116} = 1$

مثال اوجد قيمة i^{1035}

الحل $i^{1035} = i^{1034} * i = (i^2)^{517} * i$

$= (-1)^{517} * i$

$= -1 * i = -i$

الاعداد المركبة

يكتب العدد المركب بالصورة $Z = a + ib$

حيث a و b اعداد حقيقية .

a = الجزء الحقيقي .

b = الجزء التخيلي .

ib = العدد التخيلي .

ملاحظ

① $3i = 0 + 3i \rightarrow a=0, b=3$

② $5 = 5 + 0i \rightarrow a=5, b=0$

تعريف الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ = جميع الأعداد الحقيقية والاعداد التخيلية معاً اضافة الى حاصل جمع هذه الاعداد .

الاعداد التخيلية ⇐ الجذور التربيعية للاعداد السالبة مثل

مثل $\sqrt{-5}$ ، $\sqrt{-9}$ ، $5i$ ، $-7i$

مثال $z = 3 + 5i$

الجزء الحقيقي $= 3 \leftarrow a = 3$

الجزء التخيلي $= 5 \leftarrow b = 5$

العدد التخيلي هو $5i$

مثال $z = 2 - i\sqrt{3}$

الجزء الحقيقي هو $a = 2$

الجزء التخيلي هو $b = -\sqrt{3}$

العدد التخيلي هو $-i\sqrt{3}$.

تعريف: يتساوى العددان المركبان

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ , } b = d$$

حيث a, b, c, d اعداد حقيقية .

مثال اذا كان $3 + ib = c - 2i$ جد كل من b, c ؟؟ .

الحل $c = 3$, $b = -2$

مثال أوجد قيمة a, b التي تجعل المعادلة

$$12 + 3a - 5i + 2bi = 6a + 10i$$

الحل $12 + 3a + (-5 + 2b)i = 6a + 10i$

$$12 + 3a = 6a \Rightarrow 12 = 3a$$

$$\boxed{a = 4}$$

$$-5 + 2b = 10$$

$$2b = 15 \Rightarrow \boxed{b = \frac{15}{2}}$$

مثال اذا كان $2x-3yi+y+xi=6$ حيث x,y ؟

الحل

$$(2x+y)+(-3y+x)i=6+0i$$

$$2x+y=6 \quad \text{---} \boxed{1}$$
$$x-3y=0 \quad \text{---} \boxed{2}$$

$\boxed{1}*3+\boxed{2}$

$$\begin{array}{r} 6x+3y=18 \\ x-3y=0 \quad (+) \\ \hline 7x=18 \end{array} \Rightarrow x=\frac{18}{7}$$

نعوض في $\boxed{2}$

$$\frac{18}{7}-3y=0$$

$$3y=\frac{18}{7} \Rightarrow y=\frac{18}{3\times 7}=\frac{6}{7}$$

مثال اذا كان $z=2x+iy$ حيث x,y حقيقية

التي تجعل $z=0$

الحل

$$2x+iy=0+0i$$

$$2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\boxed{y=0}$$

مثال واجب جد x,y التي تحقق المعادلة

$$x+5+(4y-9)i=12-5i$$

تعريف مرافق العدد المركب $x+iy$ هو $x-iy$

ويرمز لمرافق العدد المركب z بالرمز $\bar{z}$.

مثال مرافق $z=3+i$ هو $\bar{z}=3-i$

تمثيل العدد المركب ومرافقه بيانياً

المستوى المركب ⇐ يسمى المحور الأفقي بـ المحور الحقيقي (Re)

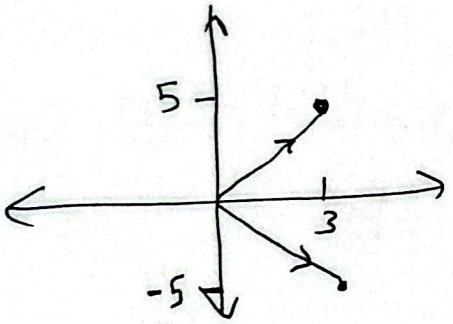
يسمى المحور الرأسي بالمحور التخيلي (Im)

* يمثل العدد المركب $z=a+ib$ بالزوج المرتب (a,b)

مثال مثل العدد المركب ومرافقه بيانياً فيما يلي .

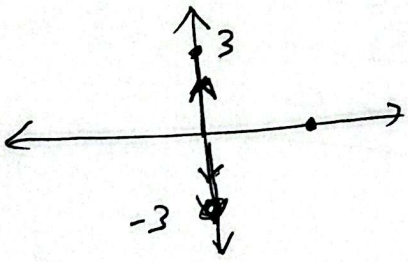
① $z=3+5i \leftarrow (3,5)$

الحل $\bar{z}=3-5i \leftarrow (3,-5)$



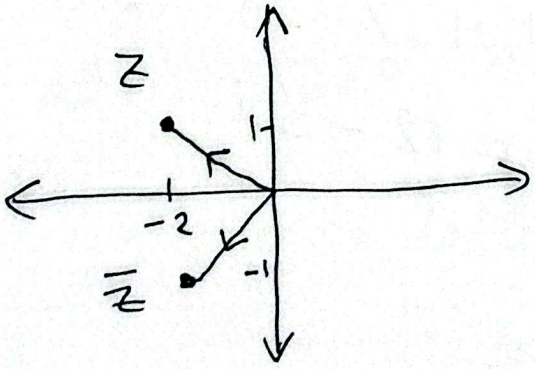
② $z=3i \leftarrow (0,3)$

$\bar{z}=-3i \leftarrow (0,-3)$



③ $z=-2+i$

$\bar{z}=-2-i$



تعريف مقياس العدد المركب $z=a+ib$ هو المسافة بين النقطة (a,b) ونقطة الأصل $O(0,0)$ ويرمز له بالرمز $|z|$ أو r

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

مثال جد مقياس العدد المركب فيما يلي

① $z=3+4i$ ⟸ الحل $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

② $z=-6i$ ⟸ $|z|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$

مثال ما مرافق العدد المركب $z=4$ ثم أجد مقياسه.

الحل $\bar{z}=4$ ، $|\bar{z}|=\sqrt{4^2+0^2}=4$

تعريف سعة العدد المركب: $z=a+ib$

هي الزاوية ϕ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة (a,b)

السعة للعدد المركب $\approx$ السعة الرئيسة للعدد المركب.

وتكون $-\pi<\phi\leq\pi$

ويرمز لها بالرمز $arg(z)$ ← سعة العدد المركب.

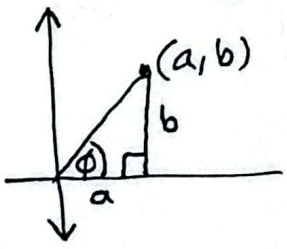
$Arg(z)$ ← السعة الرئيسة للعدد المركب.

تعريف

سعة العدد المركب $z=a+ib$ هي

$$\theta=Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

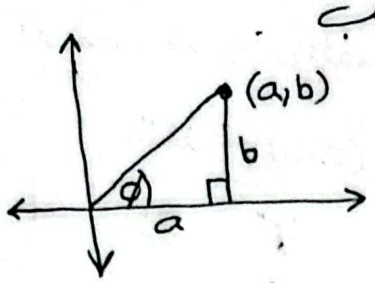
حيث $a>0$ ، $b>0$



(a,b) بالربع الأول.

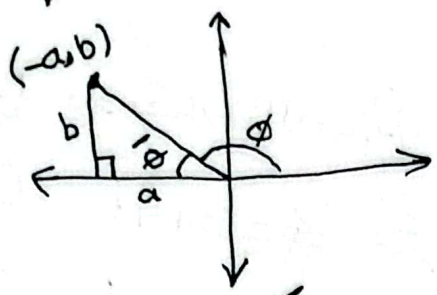
$$\tan\phi=\frac{b}{a}\Rightarrow\phi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

(*) اذا كل من a ، b هو عدد موجب .



1 بالربع الأول $Z = a + ib$

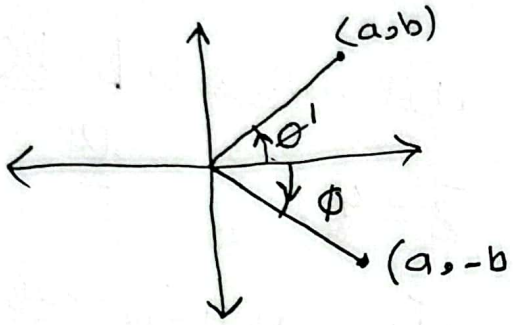
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



2 بالربع الثاني $Z = -a + ib$

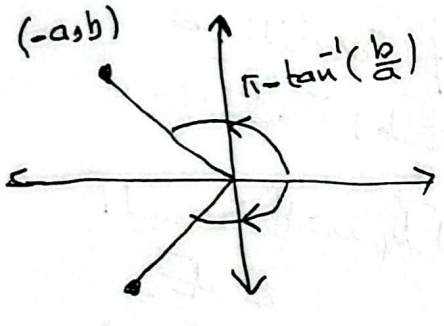
$\phi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\phi = \pi - \phi'$



3 بالربع الرابع $Z = a - ib$

$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



4 بالربع الثالث $Z = -a - ib$

$\phi = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right))$

مثال أجد زاوية الاعداد المركبة فيما يلي وقرب إلى أقرب منزلتين عشريتين .

① $Z = 4 + 3i$ بالربع الأول .

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$

② $Z = -3 + 8i$ ← الربع الثاني

الحل

$\phi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1.93$

③ $Z = 8 - 4i$ ← الربع الرابع

$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right) = -0.46$

مثال جد سعة العدد $Z = 8 - 8i\sqrt{3}$ ؟؟

الحل الربع الرابع

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

مثال جد سعة العدد المركب

$$Z = -\sqrt{15} - i\sqrt{5}$$

الحل بالربع الثالث

$$\phi = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)\right)$$

$$\phi = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية للعدد المركب الذي صورته القياسية

$$Z = a + ib$$

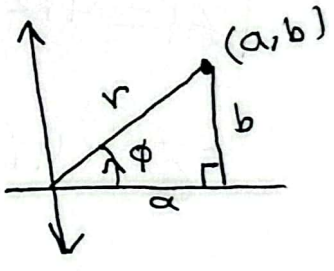
حفظ $Z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

حيث r = مقياس العدد المركب .

ϕ = سعته الرئيسية .

ملاحظة اذا كان ϕ ليست ضمن القيمة $(-\pi, \pi]$

نضيف او نطرح $2n\pi$ لكي تكون السعة في $-\pi < \phi \leq \pi$



$$\sin\phi = \frac{b}{r}$$

$$r\sin\phi = b$$

$$\cos\phi = \frac{a}{r}$$

$$r\cos\phi = a$$

$$Z = a + ib$$

$$Z = r\cos\phi + ir\sin\phi$$

$$Z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

مثال / اكتب العدد المركب بالصورة المثلثية بالحالات الآتية

① $|z| = 5$ ، $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

الحل

$z = 5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

② $z = -2 - 5i$

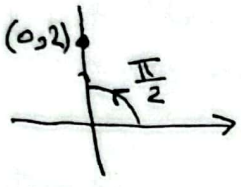
الحل

$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}(\frac{5}{2}))$ ، $r = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$Arg(z) = -1.95$

$\therefore z = \sqrt{29}(\cos -1.95 + i\sin -1.95)$

③ $z = 2i$



الحل

$|z| = \sqrt{0+4} = 2$

$\phi = \tan^{-1}(\frac{2}{0})$

$\phi = \frac{\pi}{2}$

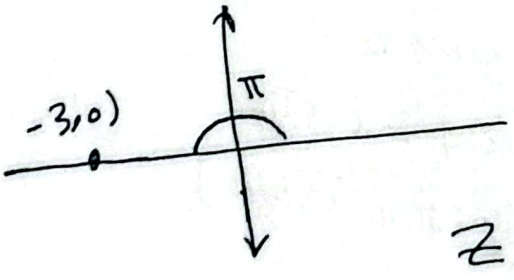
$z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

④ $|z| = 4\sqrt{2}$ ، $Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

الحل

$z = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$

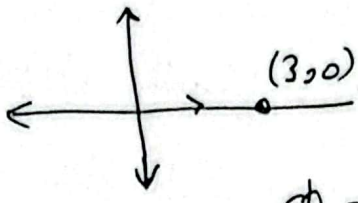
⑤ $z = -3$



الحل

$\phi = \pi$ ، $|z| = 3$

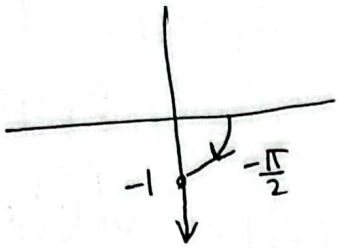
$z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$



⑥ $z = 3$

$\phi = 0 \quad , \quad |z| = 3$

$z = 3(\cos 0 + i \sin 0)$



⑦ $z = -i$

$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad |z| = 1$

$z = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

مثال أجد قيم x ، y التي تجعل المعادلة صحيحة

$x^2 - 1 + i(2y-5) = 8 + 9i$

الحل

$x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$

$2y - 5 = 9 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$

مثال أجد قيمة x ، y التي تجعل المعادلة صحيحة فيما يلي

$3ix + y + 2i - 3 = 9 + i(y-4)$

الحل

$(y-3) + i(3x+2) = 9 + i(y-4)$

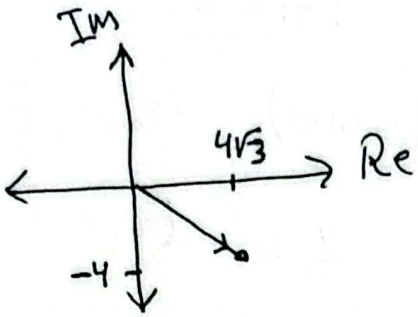
$y - 3 = 9 \Rightarrow \boxed{y = 12}$

$3x + 2 = y - 4$

$3x + 2 = 12 - 4 \Rightarrow 3x + 2 = 8$

$3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

مثال يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركب : z_1



أجد العدد المركب z_2 الذي يحقق

$|z_2| = 40$, $\text{Arg}\, z_2 = \text{Arg}(\bar{z}_1)$

الحل

$$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$\bar{z}_1 = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(\bar{z}_1) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

الصورة المثلثية $\Rightarrow$ $z_2 = 40\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

الصورة القياسية $z_2 = 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$$z_2 = 2\sqrt{3} + 20i$$

مثال اذا $z = a + ib$ حيث $|z| = 10$ ، $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$

أجد قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين العددين z ، $\bar{z}$ واكتب z ، $\bar{z}$ بالصورة القياسية

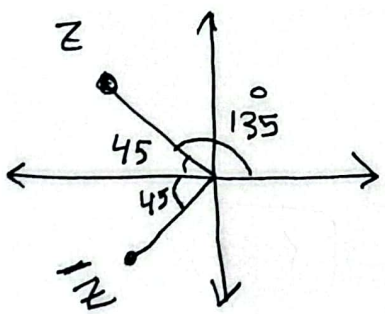
الحل

$$z = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z = 10\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = -\frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{z} = -\frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$



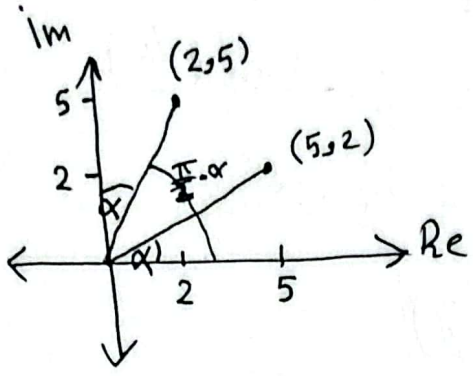
الزاوية الصغرى المحصورة بين z ، $\bar{z}$ هي

$\frac{\pi}{2} = 90^\circ = 45 + 45$

مثال اذا $\beta \sim$ $Arg(5+2i)=\alpha$ أكتب صيغة كل مما يلي بدلالة α

① $2+5i$ ② $-5+2i$ ③ $-2+5i$ ④ $5-2i$

الحل ①



$$Arg(5+2i) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \alpha$$

$$Arg(2+5i) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha$$

②

$$Arg(-5+2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

بالربع الثاني $= \pi - \alpha$

③

$$Arg(-2+5i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

الربع الثاني $= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

④

$$Arg(5-2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\alpha.$$

الربع الرابع

ملاحظة اذا $\beta \sim$ a, b موجبين

$$Arg(a+ib) = \frac{\pi}{2} - Arg(b+ia)$$

مثال: اذا $\text{Arg}(3+7i)=\alpha$ بدلالة α فجد $\text{Arg}(-7+3i)$

الحل

$$\text{Arg}(7+3i)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\text{Arg}(-7+3i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$$
بالتعويض $$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

مثال: اذا β ، $Z=5+3iK$ حيث $|Z|=13$ اوجد جميع قيم K الحقيقية، ثم اكتب β بالصورة القطبية.

الحل

$$\sqrt{5^2+(3K)^2}=13$$
$$25+9K^2=169 \Rightarrow 9K^2=144$$
$$-25 \qquad -25$$
$$K^2=\frac{144}{9}$$
$$K=\mp\frac{12}{3}=\mp 4$$

مثال: اذا β ، $Z=5+im$ حيث $|Z|=6$ ، $0<\text{Arg}(z)<\frac{\pi}{2}$ اوجد قيمة العدد الحقيقي m.

الحل

$$\sqrt{25+m^2}=6 \Rightarrow 25+m^2=36$$
$$m^2=11 \Rightarrow m=\mp\sqrt{11}$$
$$\text{فقط} \quad m=\sqrt{11}$$
Z تقع في الربع الاول $\Leftarrow$ $0<\text{Arg}(z)<\frac{\pi}{2}$

مثال: اذا كان Z_1 عدد مركب مقياسه $4\sqrt{5}$ وسعته ϕ

حيث $\phi = \tan^{-1}(2)$

① اكتب العدد Z_1 بالصورة القياسية.

② اذا كان $Z_2 = 7-3i$ ، $Z_3 = -5+i$ أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه Z_1, Z_2, Z_3.

الحل

$Z_1 = a+ib \Leftarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)$

$\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{b = 2a}$

$\sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+4a^2} = 4\sqrt{5}$

$\sqrt{5a^2} = 4\sqrt{5}$

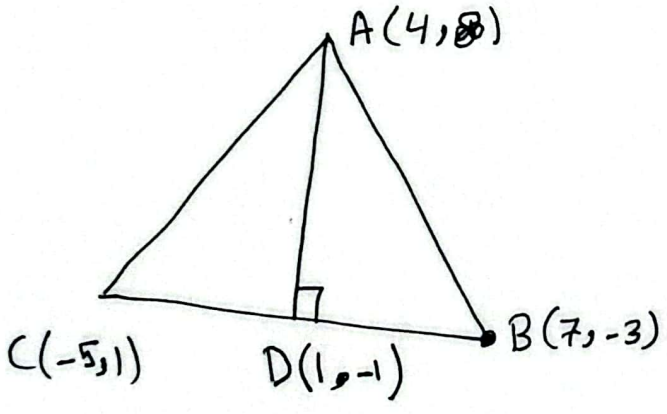
$a = 4 \Rightarrow \boxed{a=4}$

$\boxed{b=8}$

Z_1 بالربع الأول ← ϕ سالبة او تحوي π

$\boxed{Z_1 = 4+8i}$

نجد مساحة المثلث الذي رؤوسه $A(4,8)$ ، $B(7,-3)$ ، $C(-5,1)$



$AB = \sqrt{(4-7)^2+(8--3)^2}$

$AB = \sqrt{9+121} = \sqrt{130}$

$AC = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

$BC = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$

مثلث متطابق الضلعين

BC قاعدة

الارتفاع $= AD = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

$A = \frac{1}{2} * \sqrt{160} * \sqrt{90}$

$= \frac{1}{2} * 4\sqrt{10} * 3\sqrt{10} = 60$