الرياضيات -المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الرابعة: الأعداد المركبة

الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

رقم الهاتف:

0777298115

العمليات على الاعداد المركبه

* جمع عددين مركبين وطرحهما .

اذا كان $z_1 = a+bi$ ، $z_2 = c+di$

فان :

① $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

② $z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$

مثال اوجد ناتج مايلي

① $3+5i-(2-4i) = 3+5i-2+4i$
$= (3-2) + i(5+4)$
$= 1+9i$

② $-7+2i+9+i = (-7+9) + i(2+1)$
$= 2+3i$

③ $-5i-(1-4i) = -5i-1+4i$
$= -1 + i(-5+4)$
$= -1-i$

مثال $z_1 = -3i+2$ $z_2 = 16$ جد $z_2 - z_1$

الحل

$z_2 - z_1 = 1 + 3i - 2$
$= -1 + 3i$

* ضرب الاعداد المركبه

مثال اوجد ناتج $(3+5i)(2+7i)$

الحل

$$(3+5i)(2+7i) = 6+21i+10i+35i^2$$
$$= 6+31i-35$$
$$= -29+31i$$

لاحظ $\boxed{i^2=-1}$

مثال اوجد ناتج مايلي

① $3i(-2-6i) = -6i-18i^2$
$$= -6i+18$$

② $4(3+2i) = 12+8i$

مثال $Z_1 = 5-3i$, $Z_2 = -4-6i$ جد Z_1Z_2

الحل

$$(5-3i)(-4-6i) = -20-30i+12i+18i^2$$
$$= -20-18i-18$$
$$= -38-18i$$

مثال اوجد ناتج $(5+2i)^2$

الحل

$$(5+2i)^2 = 5^2+2(5)(2i)+(2i)^2$$
$$= 25+20i+4i^2$$
$$= 25+20i-4$$
$$= 21+20i$$

مثال اوجد ناتج $(2+3i)^3 \cdot (2i)$

الحل $(2+3i)^3 = 2^3 + 3(2)^2(3i) + 3(2)(3i)^2 + (3i)^3$

$= 8 + 36i + 6 * 9i^2 + 27i^3$

$= 8 + 36i - 54 - 27i$

$= (8-54) + i(36-27)$

$= -46 + 9i$

$\therefore (2+3i)^3(2i) = (-46+9i)(2i)$

$= -92i + 18i^2$

$= -92i - 18$

$= -18 - 92i$

لاحظ $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

مثال اوجد ناتج $(1-2i)^3$

الحل $(1-2i)^3 = 1^3 + 3(1)^2(-2i) + 3(1)(-2i)^2 + (-2i)^3$

$= 1 - 6i + 3(4i^2) - 8i^3$

$= 1 - 6i - 12 + 8i$

$= -11 + 2i$

مثال اذا كان $Z=2-5i$ اوجد ناتج $Z\bar{Z}$

الحل

$$
\begin{aligned}
Z\bar{Z} &= (2-5i)(2+5i)\\
&= 4+10i-10i-25i^2\\
&= 4+25 = 29
\end{aligned}
$$

قاعده $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

مثال

1. $(6+2i)(6-2i) = 6^2+2^2 = 40$
2. $(-5-3i)(-5+3i) = (-5)^2+3^2 = 34$
3. $6i(-6i) = -36i^2 = 36$

قسمة الأعداد المركبه

نضرب بمرافق المقام ونقسم عليه .

مثال اوجد ناتج $\dfrac{5+2i}{4-3i}$

الحل

$$
\begin{aligned}
\frac{5+2i}{4-3i} &= \frac{5+2i}{4-3i} * \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{20+15i+8i+6i^2}{16+9}\\
&= \frac{20+23i-6}{25}\\
&= \frac{14}{25}+\frac{23}{25}i
\end{aligned}
$$

مثال جد نا تج $\dfrac{2-6i}{-3i}$

الحل

$$\frac{2-6i}{-3i} = \frac{2-6i}{-3i} * \frac{3i}{3i}$$

$$= \frac{6i-18i^2}{9} = \frac{18+6i}{9}$$

$$= 2+\frac{2}{3}i$$

(*) ضرب الاعداد المركبة بالصورة المثلثية وقسمتها

اذا كان :

$$z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2),\quad z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$$

فان

1. $$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$

$-\pi < \phi_1 + \phi_2 \leq \pi$ شرط

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \phi_1 + \phi_2 = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

2. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right)$$

$-\pi < \phi_1 - \phi_2 \leq \pi$ شرط

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$$

تطبيقات

$$\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2=\sin(\phi_1+\phi_2)$$

$$\sin\phi_1\cos\phi_2-\cos\phi_1\sin\phi_2=\sin(\phi_1-\phi_2)$$

زاوية sin ادرة

$$\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2=\cos(\phi_1-\phi_2)$$

الأبكرادة

$$\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2=\cos(\phi_1+\phi_2)$$

مثال اذا كـ $Z_1=r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$, $Z_2=r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$

اثبت ا $Z_1Z_2=r_1r_2\left(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$

البرهـ

$$Z_1Z_2=r_1r_2(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2+i\cos\phi_1\sin\phi_2+i\sin\phi_1\cos\phi_2+i^2\sin\phi_1\sin\phi_2\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2+i(\cos\phi_1\sin\phi_2+\sin\phi_1\cos\phi_2)\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$

مثال $Z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $Z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ جد Z_1Z_2

الحل

$$Z_1Z_2=6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال اذا كان $Z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $Z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$

اثبت ان

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right)$$

البرهان

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)}{r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)} * \frac{\cos\phi_2 - i\sin\phi_2}{\cos\phi_2 - i\sin\phi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\phi_1\cos\phi_2 - i\sin\phi_2\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\cos\phi_2 - i^2\sin\phi_1\sin\phi_2}{\underbrace{\cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_2}_{1}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 + i\left(\sin\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_2\cos\phi_1\right)\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right)$$

مثال اذا كان $Z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $Z_2 = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

جد $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

مثال $Z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin -\frac{2\pi}{7}\right)$

$Z_2 = 2\left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}\right)$

جد ① $Z_1 Z_2$ ② $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل

① $Z_1 Z_2 = 20\left(\cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7}\right)$

② $\frac{Z_1}{Z_2} = 5\left(\cos -\frac{8\pi}{7} + i \sin -\frac{8\pi}{7}\right)$

أقل من $-\pi$

$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right)\right)$

$= 5\left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}\right)$

مثال $Z_1 = 3\left(\cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6}\right)$

$Z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ جد $Z_1 Z_2$

الحل يجب كتابة Z_2 بالصورة المثلثية.

$Z_2 = 2\left(\cos -\frac{2\pi}{3} + i \sin -\frac{2\pi}{3}\right)$

$Z_1 Z_2 = 6\left(\cos -\frac{5\pi}{6} + i \sin -\frac{5\pi}{6}\right)$

الجذر التربيعي للعدد المركب

يوجد لكل عدد مركب جذران تربيعيان وهما عددان مركبان .

حيث $\sqrt{Z} = x + iy$

$Z = (x+iy)^2$ بعد تربيع الطرفين .

مثال أجد الجذرين التربيعين للعدد $-5-12i$

الحل نفرض $\sqrt{-5-12i} = x+iy$ ← المطلوب إيجاد x ، y

$$-5-12i = (x+iy)^2$$

لاحظ $i^2=-1$

$$-5-12i = x^2+2xy\,i-y^2$$

$$-5-12i = x^2-y^2+2xy\,i$$

$\therefore\ x^2-y^2=-5$ —— $\boxed{1}$

أيضاً $2xy=-12 \Rightarrow y=\frac{-6}{x}$

عوض (*)

$$x^2-\left(\frac{-6}{x}\right)^2=-5$$

$$\frac{x^2*x^2}{x^2*1}-\frac{36}{x^2}=-5 \Rightarrow \frac{x^4-36}{x^2}=\frac{-5}{1}$$

$$x^4-36=-5x^2 \Rightarrow x^4+5x^2-36=0$$

$$(x^2-4)(x^2+9)=0$$

إما $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\mp 2}$

أو $x^2+9\neq 0$

$x=2 \Rightarrow y=\frac{-6}{2}=-3 \Rightarrow 2-3i$ ⟵ الجذر الأول

$x=-2 \Rightarrow y=\frac{-6}{-2}=3 \Rightarrow -2+3i$ ⟵ الجذر الثاني

لاحظ الجذران كل منهما معكوس الآخر .

مثال اجد الجذرين التربيعين لـ $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

الحل نفرض ان $\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = x+iy$

نربع $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = x^2+2xyi-y^2$

$x^2-y^2=-\frac{1}{2}$ —— $\boxed{1}$

$2xy=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$ نعوض $\boxed{1}$

$\frac{x^2}{1}-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$

$\frac{16x^4-3}{16x^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 32x^4-6=-16x^2$

$32x^4+16x^2-6=0 \quad /\div 2$

$16x^4+8x^2-3=0$

$(4x^2+3)(4x^2-1)=0$

$4x^2+3\neq 0$

$4x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x=\mp\frac{1}{2}}$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow$ الجذر الاول

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow$ الجذر الثاني

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد $-9i$.

الحل

$$\sqrt{-9i} = x + iy$$

$$0 - 9i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ ——— } (1)$$

$$2xy = -9 \Rightarrow y = \frac{-9}{2x}$$ نعوض في (1)

$$x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{1} = \frac{81}{4x^2}$$

$$4x^4 = 81 \Rightarrow x^4 - \frac{81}{4} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{9}{2}\right)\left(x^2 - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{2} \neq 0$$

$$x^2 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \mp \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{-9}{\frac{6}{\sqrt{2}}} = \frac{-9\sqrt{2}}{6}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

أو $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\, i \rightarrow$ الجذر الأول

عندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

أو $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$ ——— الجذر الثاني

ملاحظة اذا كان x_1 ، x_2 هما جذران المعادلة التربيعية فإن المعادلة تكون بالصورة

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + \text{حاصل ضربهما} = 0$$

مثال ما المعادلة التربيعية التي جذريها هما 5 ، 7 .

الحل

$$x^2 - (7+5)x + 7(5) = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

مثال ما المعادلة التربيعية التي جذراها هما 1 ، -3 ؟!

الحل

$$x^2 - (-3+1)x + -3(1) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

مثال ما المعادلة التربيعية التي جذرها هي $5+2i$ ، $5-2i$

الحل مجموع الجذرين = 10

حاصل ضرب الجذرين = $(5-2i)(5+2i)$

$= 5^2 + 2^2 = 29$

$$\therefore \quad x^2 - 10x + 29 = 0$$

الجذور المركبة لمعادلات كثيرات حدود

المعادلة التربيعية التي مميزها سالب لا يوجد لها جذرين حقيقيين لكن لها جذرين مركبين بدلالة i .

مثال أجد الجذور المركبة للمعادلة $x^2-10x+29=0$

الحل المميز $\Leftarrow$ $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 100-4(1)(29) = -16$

القانون العام $\Leftarrow$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{--10 \mp \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{10 \mp 4i}{2} = 5 \mp 2i$$

ملاحظة الجذرين المركبين للمعادلة التربيعية هما مترافقان

اذا كان $a+ib$ جذر لمعادلة تربيعية .

فأن $a-ib$ هو الجذر الآخر للمعادلة

ملاحظة اذا كان x_1 ، x_2 هما جذران للمعادلة التربيعية

فأن المعادلة التربيعية هي : $x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2=0$

مثال ما المعادلة التربيعية التي أحد جذريها $-3+5i$

الحل ∴ الجذر الآخر هو $-3-5i$

مجموع الجذرين $= -6$

حاصل ضرب الجذرين $= 9+25 = 34$

∴ المعادلة التربيعية هي

$x^2--6x+34=0$

$x^2+6x+34=0$

مثال أجد جميع الجذور الحقيقية والمركبة للمعادلة

$$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$$

الحل بالتجريب ← الاصفار النسبية

$\boxed{z=-3}$ $-27 - 9 + 21 + 15 = 0$

$$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$$

*	z^2	$-4z$	5	
z	z^3	$-4z^2$	$5z$	0
3	$3z^2$	$-12z$	15	

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(5) = -4$$

$$z = \frac{--4 \mp \sqrt{-4}}{2(1)} = \frac{4 \mp 2i}{2} = 2 \mp i$$

الجذور هي $2+i$, $2-i$, -3

مثال أجد جميع الجذور الحقيقية والمركبة للمعادلة $x^4 - x^2 - 6 = 0$

الحل

$$(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

اما $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

او $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{-2} = \mp i\sqrt{2}$

مثال أجد جميع الجذور الحقيقية والمركبة للمعادلة

$$z^3 + 4z^2 + z = 26$$

الحل $z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$ ← بالتجريب $\boxed{z=2}$

$$8 + 16 + 2 - 26 = 0$$

*	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13z$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(13) = -16$$

$$z = \frac{-6 \mp \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{-6 \mp 4i}{2}$$

$$z = -3 \mp 2i$$

الجذور هي :

$-3+2i$, $-3-2i$ و 2

مثال اوجد قيمة $(5-2i)^2$ ؟ .

الحل $(5-2i)^2 = 5^2 - 2(5)(2i) + (2i)^2$
$= 25 - 20i - 4 = 21 - 20i$

مثال اوجد نا تج $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$

الحل

$(4-6i)(1-2i) = 4 - 8i - 6i + 12i^2$
$= -8 - 14i$

$(-8-14i)(2-3i) = -16 + 24i - 28i - 42$
$= -58 - 4i$

س 15 الكتاب ص 166
أضرب العدد المركب $8(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ بمرافقه .

الحل نكتب العدد المركب بالصورة المثلثيه .

$8(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}) * 8(\cos -\frac{\pi}{4} - i\sin -\frac{\pi}{4})$

$= 64(\cos^2 -\frac{\pi}{4} + \sin^2(-\frac{\pi}{4}))$
$= 64 * 1 = 64$

ملاحظه
$(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\phi - i\sin\phi) = 1$

لان $\cos^2\phi - i^2\sin^2\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

استنتاج اذا كان $Z = r(\cos\theta + i\sin\phi)$ فان $Z.\bar{Z} = r^2$

استنتاج:

① $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \times |z_2|$

② $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

③ $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg z_1 + Arg(z_2)$

④ $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg z_1 - Arg z_2$

* ص 178 الكتاب

$z_1 = \sqrt{12} - 2i$, $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$, $z_3 = 2 - 2i$

جد مقياس والسعة الرئيسية لـ

(36) $\frac{z_2}{z_1}$ (37) $\frac{1}{z_3}$ (38) $\frac{z_3}{z_2}$

الحل

$|z_1| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$|z_2| = \sqrt{5+15} = \sqrt{20}$

$|z_3| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan(\sqrt{3})$

$= -\frac{\pi}{3}$

$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1)$

$= -\frac{\pi}{4}$

(16) $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(17) $\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

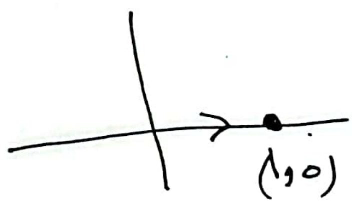
(18) $\left|\frac{z_3}{\bar{z}_2}\right| = \frac{|z_3|}{|\bar{z}_2|} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(z_2) - \operatorname{Arg}(z_1)$

$= -\frac{\pi}{3} - -\frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{6}$

$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_3}\right) = \operatorname{Arg}(1) - \operatorname{Arg}(z_3)$

$= 0 - -\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$



$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_3}{\bar{z}_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_3) - \operatorname{Arg}(\bar{z}_2)$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{-7\pi}{12}$

ص 179

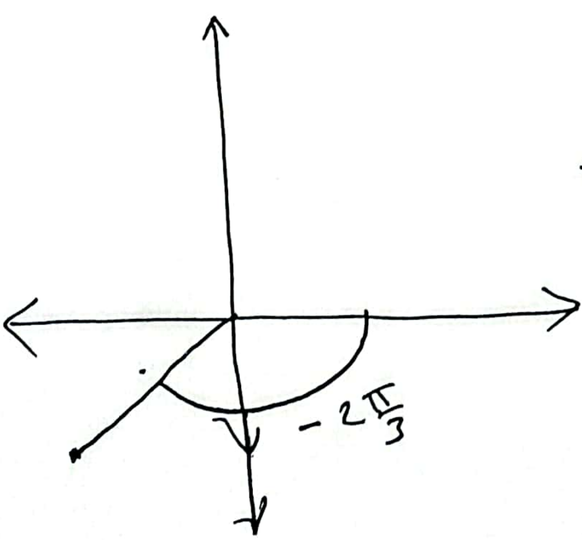
(*) اذا $z = 8(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

ص 39 مثل العدد z بيانياً

$z = 8\left(\cos -\frac{2\pi}{3} + i\sin -\frac{2\pi}{3}\right)$

مقياسه $= 8$

سعته $-\frac{2\pi}{3}$



ص 179 الكتاب

س40 اجد الجذرين التربيعيين للعدد Z .

الحل

$$Z = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z = -4 - 4i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-4-4i\sqrt{3}} = x + iy$$

$$-4-4i\sqrt{3} = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$x^2 - y^2 = -4 \text{ —— } (*)$$

$$2xy = -4\sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}$$

نعوض في $(*)$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{12}{x^2} = -4$$

$$\frac{x^4-12}{x^2} = -4 \Rightarrow x^4 - 12 = -4x^2$$

$$x^4 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2-2)(x^2+6) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6}$$

الجذر الأول هو $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

الجذر الثاني هو $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$$x^2 + 6 \neq 0$$

سؤال / إذا كان $(a-3i)$, $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب $55-48i$ أجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية a, b, c .

الحل / بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب .

$\therefore$ $-a+3i = b+ic$

$\boxed{-a=b}$, $\boxed{c=3}$

كذلك بما أن $a-3i$ جذر للعدد $55-48i$

$\therefore$ $55-48i = (a-3i)^2$

$55-48i = a^2-6ai-9$

$a^2-9=55 \Rightarrow a^2=64 \Rightarrow a=\mp 8$

$-6a=-48 \Rightarrow \boxed{a=8}$ فقط

$\therefore$ $b=-a \Rightarrow \boxed{b=-8}$

مثال / إذا كان $Z = 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ أجد $\frac{1}{Z}$ بالصورة المثلثية .

$$\frac{1}{Z} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{2(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4})} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$ حل المعادلة

الحل

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$

بالتجريب $z = -3$

$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 \stackrel{?}{=} 0$

$-54 - 72 + 39 + 87 = 0$

$-126 + 126 = 0$

	z^3	z^2	z	z^0
$\boxed{-3}$	2	-8	-13	87
	↓	-6	42	-87
	2	-14	29	0

$2z^2 - 14z + 29 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(2)(29)$$
$$= 196 - 232$$
$$= -36$$

$$z = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{--14 \mp \sqrt{-36}}{2(2)}$$

$$z = \frac{14 \mp 6i}{4} = \frac{7}{2} \mp \frac{3}{2}i$$

حل المعادلة هي -3 , $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$, $\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i$

الكتاب 179

✻ ص

اذا كان $(4+11i)$ هو أحد جذري المعادلة $z^2-8z+k=0$

حيث k عدد حقيقي اجب عن السؤالين.

س 46: أجد الجذر الآخر للمعادلة.

الحل الجذر الآخر هو $4-11i$

س 47 أجد قيمة الثابت k

الحل

$$k=(4+11i)(4-11i)$$

$$k=4^2+11^2=16+121=137$$

س 51 أثبت أن $z\bar{z}=|z|^2$ لأي عدد مركب z

ص 179

الحل

$$z=a+ib$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$|z|^2=a^2+b^2 \text{ ——— } (1)$$

$$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)$$

$$=a^2+b^2 \text{ ——— } (2)$$

$$\therefore\ z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$$

س 52 ص — اذا كان Z عدد مركب حيث $Arg(Z) = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

و $|Z| = 5\sqrt{5}$ اثبت $\frac{Z}{3+4i} = p + iq$

ان $p + q = 1$

الحل

$$Z = a + ib$$

بالتعويض $Arg(Z) = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

نجد

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

$$|Z| = 5\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{5}$$

$$a^2 + b^2 = 125$$

$$4b^2 + b^2 = 125$$

$$b^2 = 25 \Leftarrow 5b^2 = 125$$

$$\boxed{b = 5} \Rightarrow a = 2(5) = 10$$

$$Z = 10 + 5i$$

$$\frac{Z}{3+4i} = p + iq$$

$$\frac{10+5i}{3+4i} * \frac{3-4i}{3-4i} = p + iq$$

$$\frac{30 - 40i + 15i + 20}{9 + 16} = p + iq$$

$$\frac{50 - 25i}{25} = p + iq \Rightarrow 2 - i = p + iq$$

$$p = 2 \ , \ q = -1$$

$$p + q = 2 + -1 = 1$$

مثال اذا كان العدد $Z=(10-i)-(2-7i)$ هو أحد جذور المعادلة $Z^3-20Z^2+164Z-400=0$ جد بقية الجذور

الحل

$$Z=10-i-2+7i$$

الجذر الاول $Z=8+6i$

الجذر الثاني $Z=8-6i$

نجد المعادلة التي جذراها $8-6i$ و $8+6i$

المجموع $=16$

حاصل الضرب $=8^2+6^2=100$

$$Z^2-16Z+100$$

نقسم قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l}
 & Z-4 \\
\hline
Z^2-16Z+100 & Z^3-20Z^2+164Z-400 \\
 & \mp Z^3 \pm 16Z^2 \mp 100Z \\
\hline
 & -4Z^2+64Z-400 \\
 & \pm 4Z^2 \mp 64Z \pm 400 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$Z-4=0 \Rightarrow \boxed{Z=4}$$

مثال اذا كانت $8-6i$ هو حل المعادلة $z^2+kz+100=0$
جد قيمة k

الحل
$8-6i$ حقيقية المعادلة

$$(8-6i)^2+k(8-6i)+100=0$$

$$64-96i-36+8k-6ki+100=0$$

$$(128+8k)+i(-96-6k)=0+0i$$

$$128+8k=0 \Rightarrow 8k=-128$$

$$k=\frac{-128}{8}=-16$$

او $-96-6k=0 \Rightarrow k=\frac{-96}{6}=-16$

حل اخر بما ان معامل z^2 هو 1 .

$z^2-($مجموع الجذرين$)z+$ حاصل الضرب $=0$

الجذرين $8-6i$ ، $8+6i$

مجموع الجذرين $=16$

$$z^2-(-k)z+100=0$$

$$-k=16$$

$$k=-16$$

مثال اذا كان $2-i$ هو أحد جذور المعادله

$x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من a ، b .

الحل $2-i$ جذر المعادله $\Leftarrow$ $2+i$ الجذر الثاني للمعادله .

مجموع الجذرين $= 4$ $\Leftarrow$ $-a=4$ $\Leftarrow$ $\boxed{a=-4}$

حاصل ضرب الجذرين هو $2^2+1^2 = 5$ $\Leftarrow$ $\boxed{b=5}$

حل آخر حلول المعادلة

$$x = 2 \mp i$$

$$x-2 = \mp i$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2-4x+4=-1$$

$$x^2-4x+5=0$$

$b=5$ ، $a=-4$ بالمقارنة لـ $x^2+ax+b=0$

مثال $3+9i$ أحد جذور المعادلة $x^2+ax+b=0$

الحل الجذر الآخر هو $3-9i$

ومنه $x = 3 \mp 9i \Rightarrow x-3 = \mp 9i$

$$(x-3)^2 = -81$$

$$x^2-6x+9=-81 \Rightarrow x^2-6x+90=0$$

$$a=-6 \ , \ b=90$$

حل آخر مجموع الجذرين $= 6$ $\Leftarrow$ $a=-6$

حاصل ضرب الجذرين $= 90$ $\Leftarrow$ $b=90$