# الرياضيات -المسار الأكاديمي

# الفصل الدراسي الأول

## الوحدة الرابعة: الأعداد المركبة

## الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب


إعداد:

الأستاذ أمجد القرعان

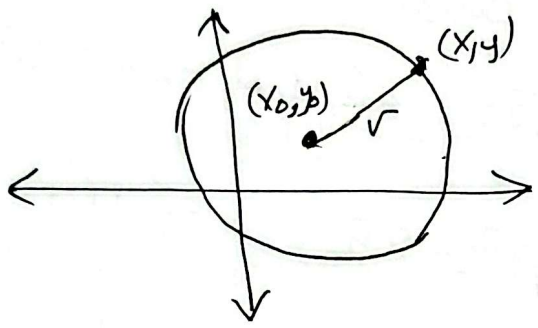
رقم الهاتف:

0777298115

## الحل الهندسي بالمستوى المركب

محورة النقاط (الصخر) الذي ترسمة نقطة متحركه $(Z)$ تحقق شروط معينه . حيث : $Z = X + iy$

الدائره :- هي الحل الهندسي للنقطة التي تمثلها $Z$ أو $(x,y)$ بالمستوى الديكارتي بحيث تبقى على بعد ثابت $(r)$ من نقطة ثابتة $(x_0, y_0)$ تسمى مركز الدائره .




تعريف الحل الهندسي في المستوى المركب الذي يمثل المعادله $|Z-(a+ib)| = r$ هو دائره مركزها $(a,b)$ ونصف قطرها $r$ .

مثال ① $|Z-(3+2i)| = 5$ معادلة دائره مركزها $(3,2)$ ونصف قطرها $5$ .

② $|Z-(0+3i)| = 4$ دائره مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها $(4)$

③ $|Z| = 7$ دائره مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $7$

$|Z-(0+0i)| = 7$

④ $|Z-3+2i| = 6 \Leftarrow |Z-(3-2i)| = 6$

دائره مركزها $(3,-2)$ ونصف قطرها $6$ .

بالصيغة الديكارتية .

مراجعة ✱ الصورة القياسية للدائرة التي مركزها $(h,k)$

ونصف قطرها $r$ هي $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

مثال اوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(3,5)$ ونصف قطرها $(7)$.

الحل $(x-3)^2+(y-5)^2=49$

مثال اوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-2,4)$ ونصف قطرها $(5)$

1 بالصيغة الديكارتية 2 بالصيغة المركبة .

الحل ديكارتية $(x+2)^2+(y-4)^2=25$

مركبة $|z-(-2+4i)|=5$

مراجعة الصورة العامة للدائرة هي $x^2+y^2+ax+by+c=0$

① معامل $x^2$ = معامل $y^2$ = 1 واذا لم تكن 1 نقسم المعادلة على معامل $x^2$

② المركز $\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ $(h,k)$

③ $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

مثال جد المركز ونصف القطر للدائرة $x^2+y^2-6x+8y-2=0$

الحل المركز $(h,k)=\left(-\frac{-6}{2},\frac{-8}{2}\right)=(3,-4)$

$r=\sqrt{3^2+(-4)^2--2}=\sqrt{27}$

مثال أجد الحل الهندسي الذي تمثله المعادله $|Z+5-4i|=7$
ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

الحل $|Z-(-5+4i)|=7$ هو دائره مركزها $(-5,4)$
ونصف قطرها $r=7$

الصيغة الديكارتية ⇐ أجعل $Z=x+iy$ بالمعادلة

$$|x+iy+5-4i|=7$$

$$|x+5+i(y-4)|=7$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7 \Rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=49$$

مثال أجد الحل الهندسي للمعادلة $|Z|=10$ ثم جد معادلته الديكارتية .

الحل $|Z-(0+0i)|=10$

الحل الهندسي هو دائره مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 10

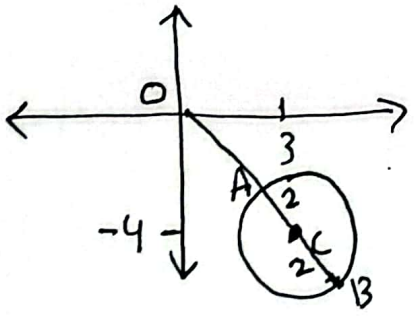
الصيغه الديكارتيه ⇐

$$|x+iy|=10$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=10 \Rightarrow x^2+y^2=100$$

مثال اذا A ، B العدد Z يحقق المعادله $|Z-3+4i|=2$ فأجد
أكبر قيمة لـ $|Z|$ واقل قيمة له

الحل $|Z-(3-4i)|=2$ دائره مركزها $(3,-4)$ ونصف قطرها 2 .




$C(3,-4)$ ، $O(0,0)$

$$OC=\sqrt{9+16}=5$$

Z على الدائره

أقل قيمة لـ $|Z|$ هي مقياس العدد الذي يمثله A

$$|Z|=OC-2=5-2=3$$

أكبر قيمه لـ $|Z|$ هو مقياس العدد الذي يمثله B

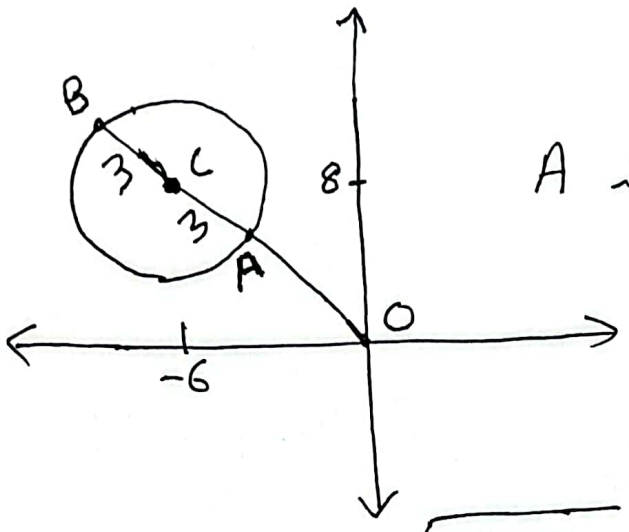
$$\boxed{3} \quad |Z|=OC+2=5+2=7$$

مثال اذا كان العدد المركب $Z$ يحقق المعادلة $|Z+6-8i|=3$

فأجد اكبر قيمة واقل قيمة لـ $|Z|$.

الحل $|Z-(-6+8i)|=3$ دائرة مركزها $(-6,8)$ ونصف قطرها $(3)$

$Z$ نقطة متحركة على الدائرة.




اقل قيمة لـ $|Z|$ عندما يكون عند $A$

$|Z| = OC - 3 = 10 - 3 = 7$

اكبر قيمة لـ $|Z|$ عندما يكون عند $B$

$|Z| = OC + 3$

$= 10 + 3 = 13$

$OC = \sqrt{36+64} = 10$

## المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

**تعريف** الحل الهندسي للمعادلة $|z-(a+ib)| = |z-(c+id)|$

هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

$(a,b)$ ، $(c,d)$ .

**ملاحظة** منتصف القطعة الواصلة بين $(a,b)$ ، $(c,d)$ هو

① $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ .

② ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $(a,b)$ ، $(c,d)$ هو $\frac{b-d}{a-c}$ .

③ ميل العمودي على القطعة الواصلة بين $(a,b)$ ، $(c,d)$ هو

$$-\frac{(a-c)}{b-d} = \frac{-1}{\frac{b-d}{a-c}}$$

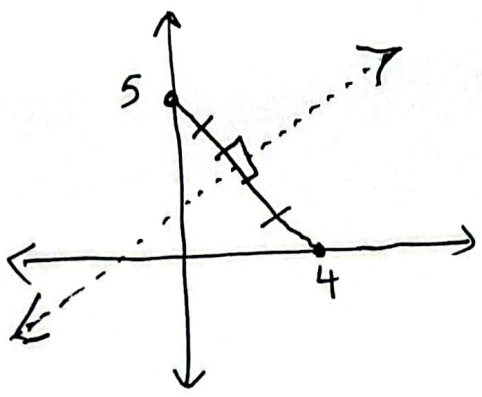
**مثال** أجد الحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-4| = |z-5i|$ ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

**الحل**

$$|z-(4+0i)| = |z-(0+5i)|$$

الحل الهندسي هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين النقطتين

$(4,0)$ ، $(0,5)$




$$|x+iy-4| = |x+iy-5i|$$

$$|(x-4)+iy| = |x+i(y-5)|$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2} \quad / \text{ تربيع}$$

$$x^2-8x+16+y^2 = x^2+y^2-10y+25$$

$$-8x+16 = -10y+25$$

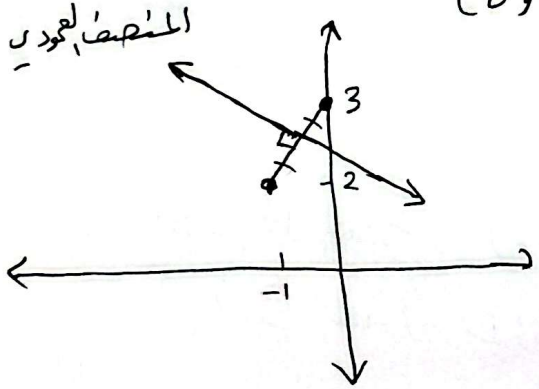
$$-8x+10y = 25-16$$

$$-8x+10y = 9$$

مثال أجب معادله الحل الهندسي بالصيغه المركبه للعدد $Z$ الذي تحقق المعادله $|Z+1-2i| = |Z-3i|$

الحل $|Z-(-1+2i)| = |Z-(0+3i)|$

الحل الهندسي هو المنصف العمودي للقطعه المستقيمه الواصله بين النقطتين $(0,3)$ , $(-1,2)$




$$|x+iy+1-2i| = |x+iy-3i|$$

$$|(x+1)+i(y-2)| = |x+i(y-3)|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4 = x^2+y^2-6y+9$$

$$2x+1-4y+4 = -6y+9$$

$$2x-4y+5+6y-9 = 0$$

$$2x+2y-4 = 0 \quad / \div 2$$

$$x+y-2 = 0$$

**تعريف** المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تمثله المعادلة

$Arg(Z-(a+ib)) = \phi$ هو شعاع بدايته

النقطة $(a,b)$ ولا يشملها ويصنع زاويه مقدارها

$\phi$ مع المحور الحقيقي الموجب او مع مستقيم يوازي

المحور الحقيقي الموجب .

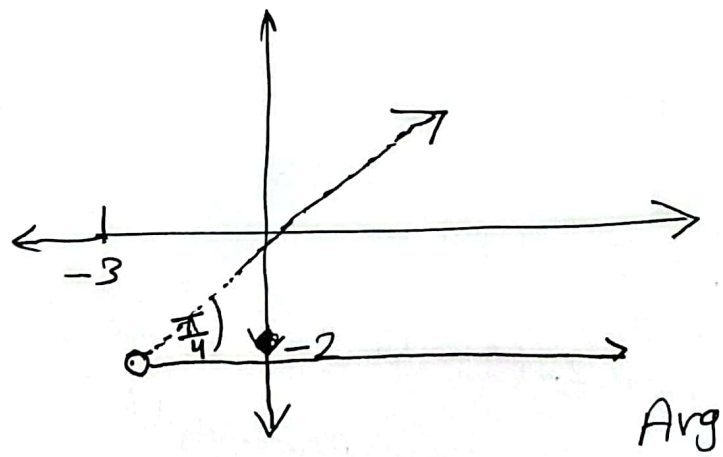
مثال أجد المحل الهندسي للمعادله $Arg(Z+3+2i) = \frac{\pi}{4}$ .

ومثله بيانياً .

الحل $Arg(Z-(-3-2i)) = \frac{\pi}{4}$

المحل الهندسي هو شعاع بدايته $(-3,-2)$ ولا يشملها

ويصنع زاويه $\frac{\pi}{4}$ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب.

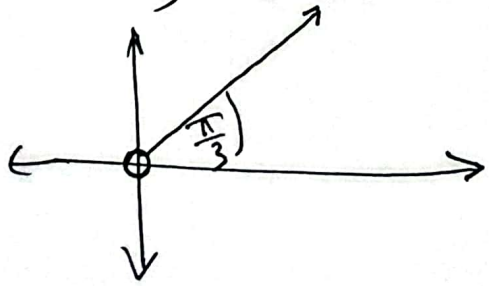



مثال أجد المحل الهندسي

للمعادله $Arg(Z) = \frac{\pi}{3}$

الحل شعاع بدايته $(0,0)$ لا يشملها ويصنع زاويه $\frac{\pi}{3}$ راديان

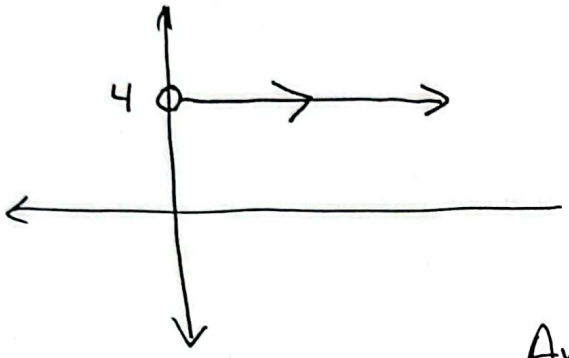
مع المحور الحقيقي



مثال أجد المحل الهندسي للمعادلة $Arg(Z-4i)=0$

الحل $Arg(Z-(0+4i))=0$

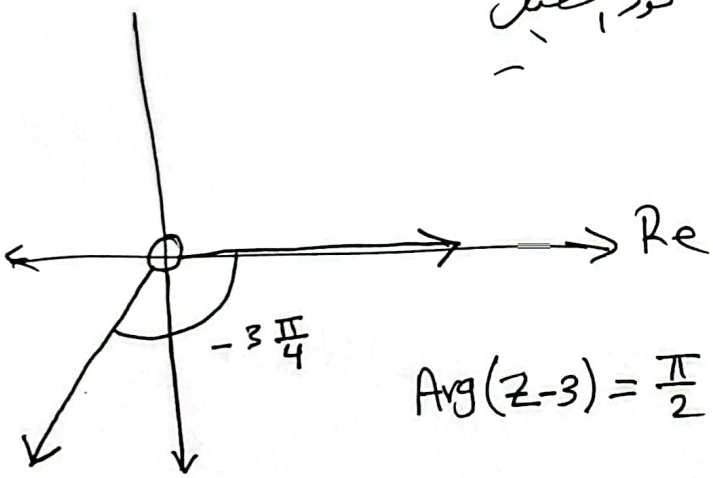
المحل الهندسي هو شعاع بدايته $(0,4)$ ولا يشمل
ويصنع زاوية 0 راديان مع المستقيم الذي يوازي المحور
الحقيقي الموجب.




مثال أجد المحل الهندسي

المعادلة $Arg(Z)=-\frac{3\pi}{4}$

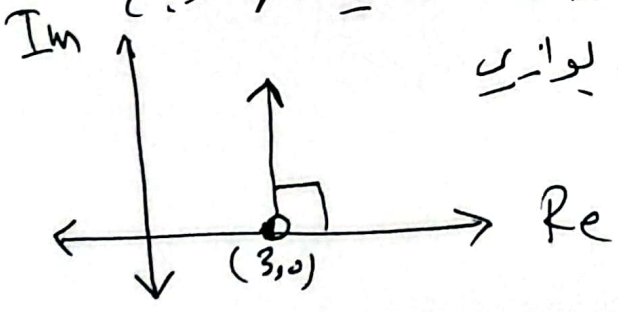
الحل شعاع بدايته $(0,0)$ ولا يشمل ويصنع زاوية $-\frac{3\pi}{4}$
مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي




مثال أجد المحل الهندسي للمعادلة $Arg(Z-3)=\frac{\pi}{2}$

الحل $Arg(Z-(3+0i))=\frac{\pi}{2}$

المحل الهندسي هو شعاع بدايته $(3,0)$ ولا يشمل ويصنع
زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع المستقيم الذي يوازي
المحور الحقيقي

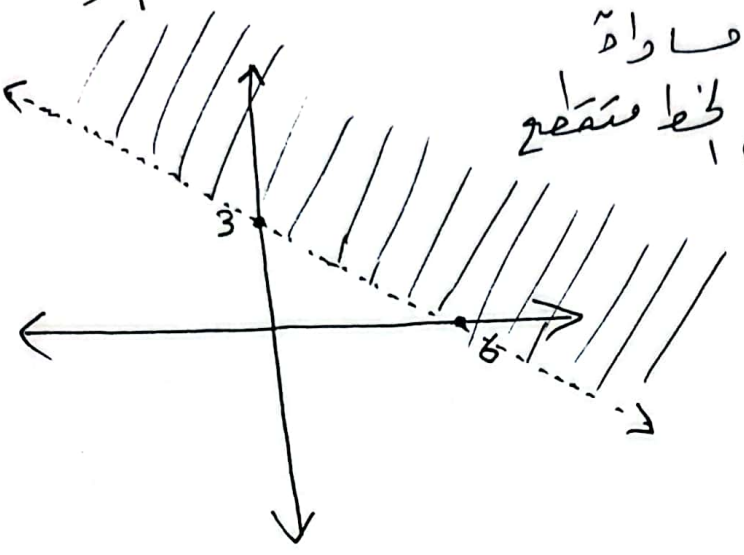


مراجعه

حل المتباينه $x+2y>6$

الحل نرسم المستقيم $x+2y=6$

| x | 0 | 6 |
|---|---|---|
| y | 3 | 0 |




ملاحظه لعدم وجود مساواة
بالمتباينه يرسم الخط متقطع

نختار $(0,0)$
نعوضها بالمتباينه

$0+0>6$

$0 \not> 6$

منطقة الحل هى المنطقه المقابله (الأخرى)

(*) تمثيل المتباينات فى المستوى المركب .

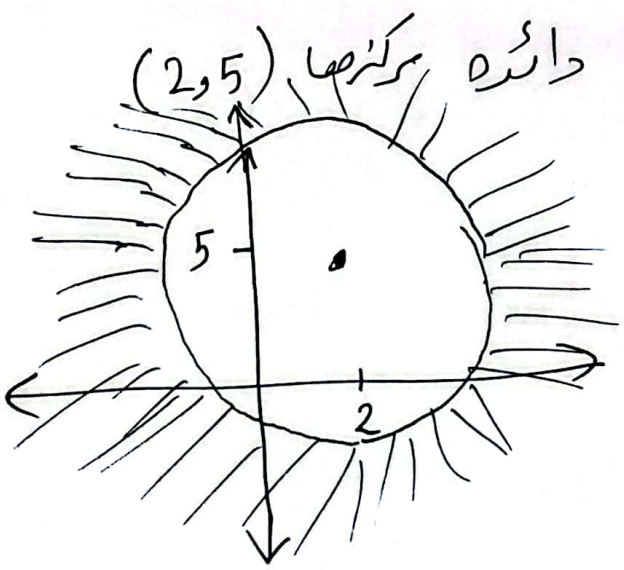
مثال مثل فى المستوى المركب منطقة حل المتباينة

$|z-2-5i| \geq 6$

الحل $|z-(2+5i)| = 6$ دائره مركزها $(2,5)$

نصف قطرها 6 .

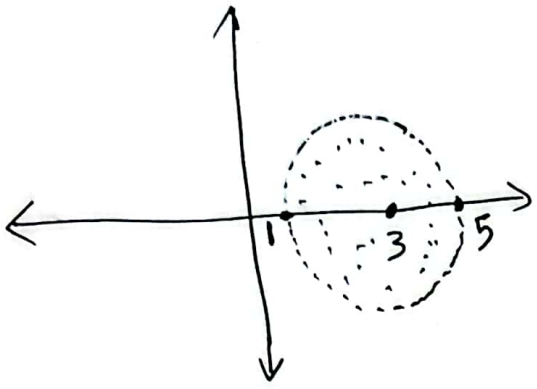
منطقة الحل هى المنطقه
المقفله بما فيها محيط الدائره .



مثال مثل منطقة حل المتباينة $|Z-3|<2$

الحل $|Z-(3+0i)|=2$ دائرة مركزها $(3,0)$

ونصف قطرها 2 .




منطقة تقع داخل الدائرة

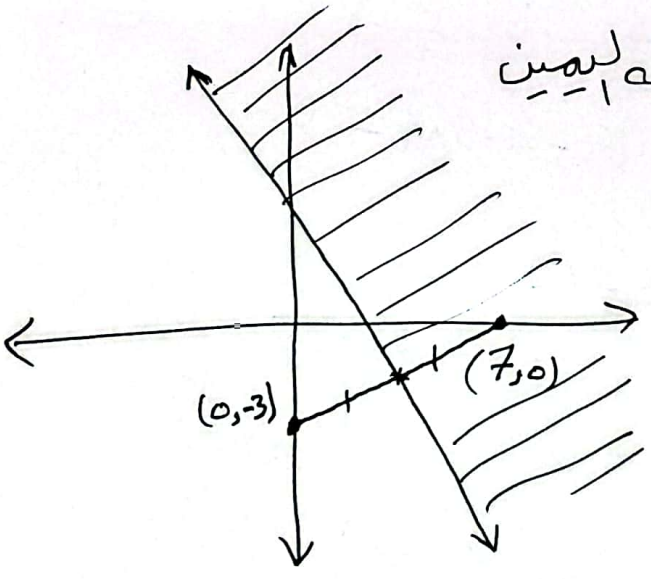
مثال مثل بالمستوى المركب

منطقة حل المتباينة

$$|Z-7| \leq |Z+3i|$$

الحل $|Z-(7+0i)| = |Z-(0-3i)|$

المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين $(7,0)$ و $(0,-3)$




نختار $(7,1)$ $\overset{x}{}$ $\overset{y}{}$ من منطقة اليمين

نعوض بالمتباينة

$$|x+iy-7| \leq |x+iy+3i|$$

$$|7+i-7| \overset{?}{\leq} |7+i+3i|$$

$$|0+i| \overset{?}{\leq} |7+4i|$$

$$\sqrt{0+1i} \overset{?}{\leq} \sqrt{49+16}$$

$$1 \leq \sqrt{65} \quad \checkmark$$

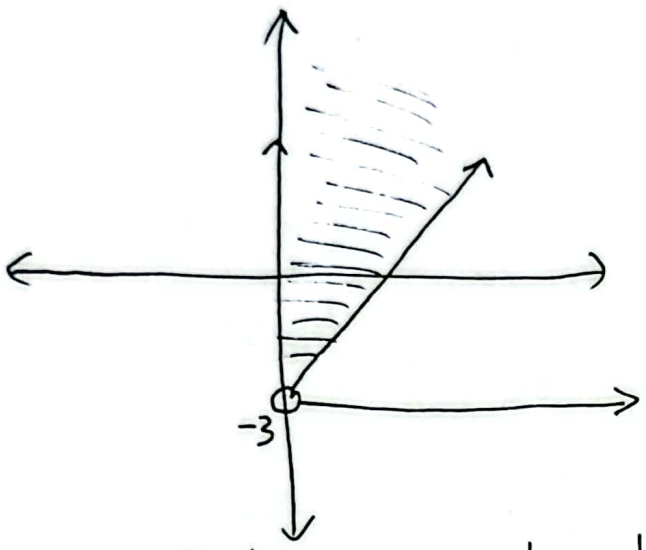
$\therefore$ $(7,1)$ تقع ضمن منطقة الحل .

مثال مثل منطقة حل المتباينة $\frac{\pi}{6} \le Arg(z+3i) \le \frac{\pi}{2}$

الحل

$$Arg(z-(0-3i)) = \frac{\pi}{2}$$

شعاع بدايته $(0,-3)$ والشمال ويصنع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي




$$Arg(z-(0-3i)) = \frac{\pi}{6}$$

شعاع بدايته $(0,-3)$ والشمال ويصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي

منطقة الحل هي المنطقة المظللة المحصورة بين الشعاعين. وبما في ذلك النقاط الواقعة على الشعاعين.

مثال مثل منطقة حل المتباينة $-\frac{\pi}{4} < Arg(z) < \frac{\pi}{3}$

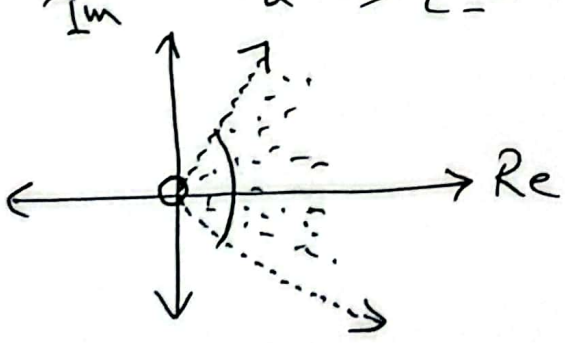
الحل

$Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ شعاع بدايته $(0,0)$ والشمال

ويصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي.

$Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$ شعاع بدايته $(0,0)$ ويصنع زاوية $-\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

منطقة الحل هي المنطقة المظللة



مثال: مثل منطقة حل المتباينات $|Z-1-2i| \leq 5$

والمتباينة $\frac{\pi}{4} < Arg(Z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$

الحل: $|Z-(1+2i)| = 5$ دائرة مركزها $(1,2)$ ونصف

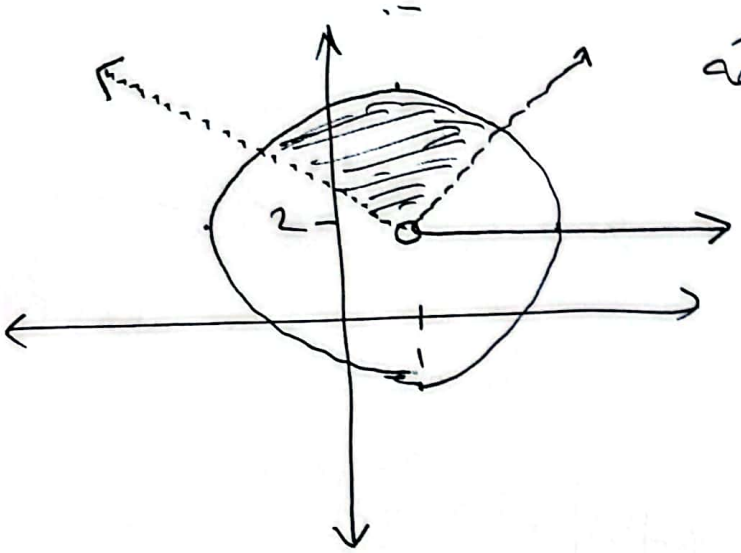
قطرها (5) ← الفرجار المدودي مستعمل

$Arg(Z-(1+2i)) = \frac{2\pi}{3}$ شعاع بدايته $(1,2)$ ولا يستعملها

ويصنع زاوية $2\frac{\pi}{3}$ مع الحقيقي.

$Arg(Z-(1+2i)) = \frac{\pi}{4}$ شعاع بدايته $(1,2)$ ولا

يستعملها ويصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع محور الحقيقي.



منطقة الحل هي المنطقة المظللة داخل القطاع الدائري. كما في الشكل المجاور.

مثال أجد الحل الهندسي للمعادلة $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$ ثم جد معادلته الديكارتية.

الحل

$$|z-(-6+i)| = |z-(10+5i)|$$

الحل الهندسي هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين النقطتين

$(-6,1)$ و $(10,5)$

$$|x+iy+6-i| = |x+iy-10-5i|$$

$$|x+6+i(y-1)| = |x-10+i(y-5)|$$

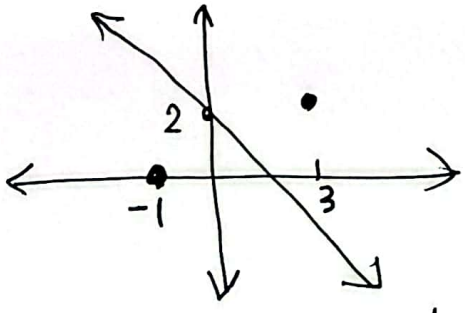
$$\sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$$

$$x^2+12x+36+y^2-2y+1 = x^2-20x+100+y^2-10y+25$$

$$32x+8y = 88 \quad /\div 8$$

$$4x+y = 11$$

مثال اكتب بدلالة $z$ معادلة الحل الهندسي الممثل بيانياً في الشكل المجاور




الحل الحل الهندسي هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين النقطتين $(3,2)$ و $(-1,0)$

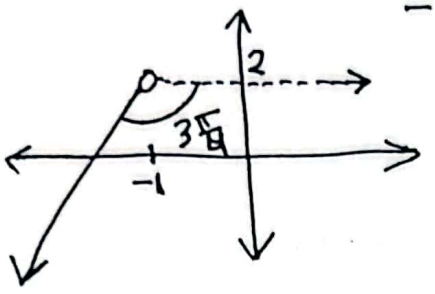
$$|z-(-1+0i)| = |z-(3+2i)|$$

$$|z+1| = |z-3-2i|$$

مثال آكتب معادلة بصورة $Arg(z-a)=\phi$ حيث

$-\pi < \phi \leq \pi$ ، a عدد مركب

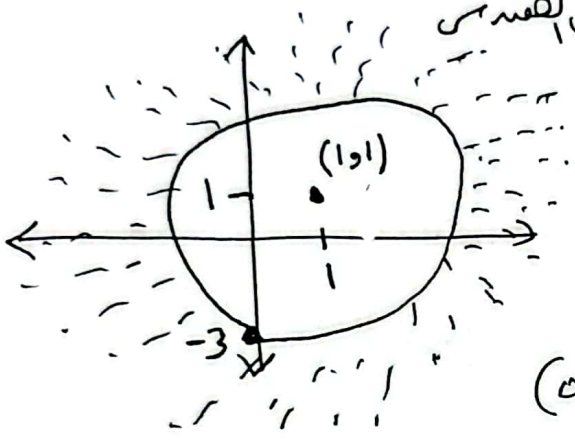
تمثل المحل الهندسي في الشكل المجاور




الحل

$$Arg(z-(-1+2i)) = -\frac{3\pi}{4}$$

مثال آكتب بدلالة z متباينة المحل الهندسي في الشكل المجاور



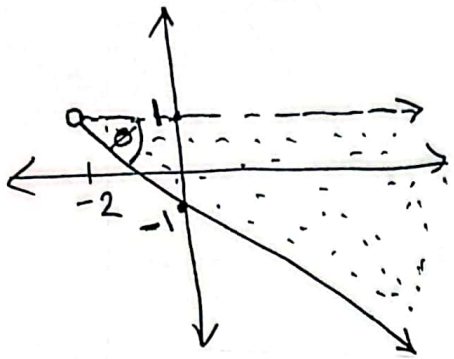

الحل المنحنى دائره مركزها (1،1)

$r$ = المسافه بين (1،1)، (5،-3)

$$r = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\therefore |z-(1+i)| \geq \sqrt{17}$$

س34 ص 180 اكتب بدلالة Z متباينة الحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظلله



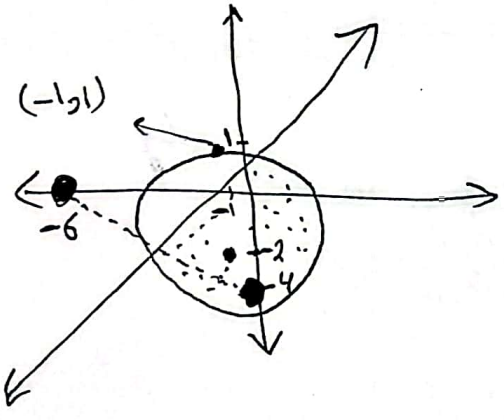

الحل $\tan\phi = \frac{1--1}{0--2} = \frac{2}{2} = 1$

$\phi = -45 = -\frac{\pi}{4}$

$\phi$ سالبه ، مع اتجاه السالب "مع عقارب الساعه".

المتباينه $-\frac{\pi}{4} \leq Arg(Z-(-2+i)) < 0$

س35 اكتب بدلالة Z نظام متباينات يمثل الحل الهندسي للشكل المجاور




الحل الدائره مركزها (-1,-2)

$r$ = المسافه بين (-1,1) ، (-1,-2)

$r = 3$

الدائره $|Z-(-1-2i)| \leq 3$

المنصف العمودي للقطعه الواصله بين النقطتين (-6,0) ، (0,-4)

$|Z+4i| \leq |Z+6|$ عوض (0,0)

$|4i| \boxed{?} |6|$

$\sqrt{16} < \sqrt{36}$

مثال اذا كانت $Z = 5+2i$ اثبت ما يلي .

① بينان $\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{1}{29}(21+20i)$

② بناءً على البحث في رحلة كل من $Z$ ، $\bar{Z}$ ، $\frac{Z}{\bar{Z}}$ بينان

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

الحل

$$\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{5+2i}{5-2i} * \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{25+20i-4}{25+24}$$

①

$$\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{21}{29} + \frac{20}{29}i = \frac{1}{29}(21+20i)$$

②

$$Arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg(\bar{Z}) = Arg(5-2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\left(\frac{Z}{\bar{Z}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

$$Arg\left(\frac{Z}{\bar{Z}}\right) = Arg(Z) - Arg(\bar{Z})$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) - -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \quad \text{XX}$$

مثال اذا ل $w = \frac{14-31i}{3-2i}$ أحد جذور المعادلة

$z^2 + cz + d = 0$ فجد الثابتين

$d$ و $c$.

الحل

$$w = \frac{14-31i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{42+28i-93i+62}{9+4}$$

$$w = \frac{104-65i}{13} = 8-5i$$

حوض بالمعادلة

$$(8-5i)^2 + c(8-5i) + d = 0$$

$$64-80i-25+8c-5ci+d=0$$

$$39+d+8c-i(80+5c)=0$$

$$39+d+8c=0 \quad \text{---} (1)$$

$$80+5c=0 \Rightarrow 5c=-80$$

في (1) نعوض $\boxed{c=-16}$

$$39+d-128=0$$

$$d=128-39$$

$$d=89$$

مثال: اثبت ان المعادله $|z-6| = 2|z+6-9i|$

تمثل معادله دائره ثم جد مركزها ونصف قطرها.

$|x+iy-6| = 2|x+iy+6-9i|$

ثم $\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 2 * \sqrt{(x+6)^2+(y-9)^2}$

$x^2-12x+36+y^2 = 4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$

$x^2-12x+36+y^2 = 4x^2+48x+144+4y^2-72y+324$

$-3x^2-3y^2-60x+72y-432 = 0 \quad / \div -3$

$x^2+y^2+20x-24y+144 = 0$

دائره مركز $(-10,12) = \left(\frac{-20}{2}, \frac{-24}{2}\right)$

$r = \sqrt{100+144-144} = 10$

مثال: اذا كان $2i$ احد جذور المعادله $az^3+5z^2+8z+20=0$ حيث a ثابت. اوجد قيمة a.

الحل

$a(2i)^3+5(2i)^2+8(2i)+20 = 0$

$-8ai-20+16i+20 = 0$

$0+(-8a+16)i = 0+0i$

$-8a+16 = 0 \Rightarrow 8a = 16$

$a = 2$

مثال: أمثل في المستوى المركب نقطة الحل الهندسي الذي تحققه كل من المعادلتين الآتيتين $|Z+2-5i|=\sqrt{29}$ ، $Arg(Z+2-5i)=\frac{-\pi}{2}$

$$Arg(Z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$$

الحل

$$|Z-(-2+5i)|=\sqrt{29}$$

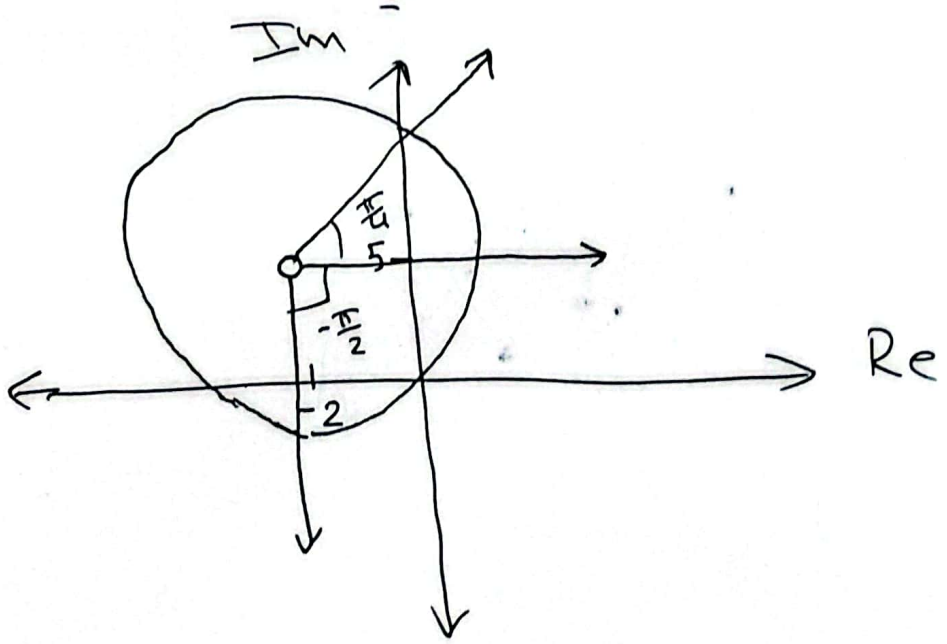
الحل الهندسي هو دائرة مركزها $(-2,5)$ ونصف قطرها $\sqrt{29}$

$$Arg(Z-(-2+5i))=-\frac{\pi}{2}$$

الحل الهندسي هو شعاع بدايته $(-2,5)$ ولا يشمل ويصنع زاوية $-\frac{\pi}{2}$ مع المستقيم الموازي للمحور الحقيقي

$$Arg(Z-(-2+5i))=\frac{\pi}{4}$$

الحل الهندسي هو شعاع بدايته $(-2,5)$ ولا يشمل ويصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي.



مثال

أمثل في المستوى المركب نفسه الحل الهندسي الذي تمثله

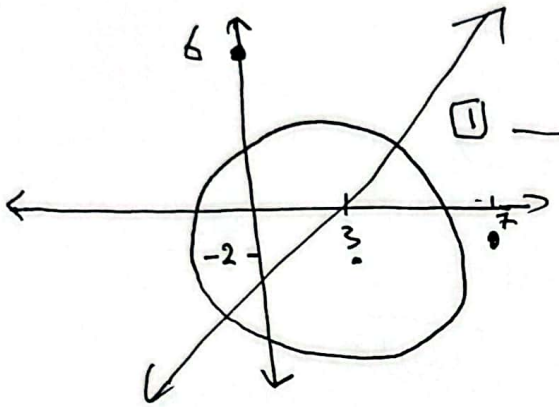
كل من المعادله $|z-3+2i| = \sqrt{10}$ والمعادله

$|z-6i| = |z-7+i|$ ثم أجد الأعداد المركبه التي تحققه المعادلتين معاً.

الحل

$|z-(3-2i)| = \sqrt{10}$ دائره مركزها $(3,-2)$

ونصف قطرها $\sqrt{10}$




معادلتها $(x-3)^2+(y+2)^2=(\sqrt{10})^2$ — [1]

$|z-(0+6i)| = |z-(7-i)|$

الحل الهندسي هو المنصف العمودي للقطعة

المستقيم الواصل بين النقطتين $(0,6)$ ، $(7,-1)$

$|x+iy-6i| = |x+iy-7+i|$

$\sqrt{x^2+(y-6)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$ / تربيع

$x^2+y^2-12y+36 = x^2-14x+49+y^2+2y+1$

$-14y+14x-14=0$ / ÷ $-14$

$y-x+1=0 \Rightarrow \boxed{y=x-1}$ نعوض [1]

$(x-3)^2+(x-1+2)^2=(\sqrt{10})^2$

$x^2-6x+9+x^2+2x+1=10$

$2x^2-4x=0 \Rightarrow x^2-2x=0$ ÷2 /

$x(x-2)=0$

$x=0$ , $x=2$

$\boxed{x=0}$ $y=0-1=-1 \Rightarrow (0,-1)$

$\boxed{x=2}$ $y=1 \Rightarrow (2,1)$

العدد الأول $z=0-i$

العدد الثاني $z=2+i$

مثال

أجد العدد المركب الذي يحقق كل من المعادلتين الآتيتين

$|z+3-i| = |z-1+5i|$ ، $|z-3| = |z+2i|$

الحل

$|x+iy-3| = |x+iy+2i|$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$ / نربع الطرفين

$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2+4y+4$

$-6x-4y = -5$ ——— (1)

كذلك

$|x+iy+3-i| = |x+iy-1+5i|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}$

$x^2+6x+9+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2+10y+25$

$8x-12y = 16$ / ÷ 4

$2x-3y = 4$ —— (2)

(2) *3 + (1)

$6x-9y = 12$

$-6x-4y = -5$ ⊕

$-13y = 7 \Rightarrow y = -\frac{7}{13}$

نعوض في (2)

$2x-3*-\frac{7}{13} = 4 \Rightarrow 2x = \frac{13*4}{13} - \frac{21}{13}$

$2x = \frac{52-21}{13} \Rightarrow 2x = \frac{31}{13} \Rightarrow x = \frac{31}{26}$

$(\frac{31}{26}, -\frac{7}{13}) \Rightarrow z = \frac{31}{26} - \frac{7}{13}i$