

* 26 كتاب التفاضل

اكتب عن الفألة 16, 17. اذا $P(x) = 3\sin x - \sin^3 x$

16 اكتب $P'(x) = 3\cos^3 x$ اكتب $P''(x)$

الكل

$$P'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x$$

$$= 3\cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow P'(x) = 3\cos^3 x$$

$$P'(x) = 3\cos t (\cos^2 x)$$

$$P''(x) = 9\cos^2 x (-\sin x)$$

$$= -9\sin x \cos^2 x$$

الكل

18 اكتب $x = a\cos t$, $y = b\sin t$: اكتب المعادلة الوسيطة

حيث $0 \leq t \leq 2\pi$ اكتب المقطع y للمماس للمنحنى عندما

$t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a, b

الكل اكتب عندما $t = \frac{\pi}{4} \Leftarrow x = a\cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = b\sin \frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ اكتب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cot t$$

$$m = -\frac{b}{a} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$$

المماس $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}(x - \frac{a}{\sqrt{2}})$

$\Leftarrow$ المقطع y هو $x=0$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}(0 - \frac{a}{\sqrt{2}})$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b$$

مكتب كتابة التمارين .

⊛ إذا $B \sim A$ الاقتران $y = e^{ax}$ حيث a ثابت ، $a > 0$

اجب عن السؤالين 19 ، 20

19 أجد إحداثي النقطة P التي تقع على منحنى هذا الاقتران ويكون عندها ميل المماس 1 .

الحل $y' = a e^{ax} = 1$ ميل المماس

بأخذ $\ln$ للطرفين $e^{ax} = \frac{1}{a} \Rightarrow \ln e^{ax} = \ln \frac{1}{a}$

$ax = \ln \frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{-\ln a}{a}$

∴ $y = e^{\frac{-\ln a}{a}} \Rightarrow y = e^{\ln a^{-1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

∴ النقطة هي $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

20 أُبَيِّنْ أَنَّهُ يُمْكِنُ كِتَابَةُ مُعَادِلَةِ الْعُجُورِيِّ عَلَى الْمَمَّاسِ عِنْدَ النِّقْطَةِ P فِي صُورَةِ $x+y = k$ ثُمَّ أَعِدْ لِهَذَا الثَّابِتِ k

الحل من المعطيات 19 ميل المماس = 1

∴ ميل العجوري = $\frac{-1}{1} = -1$

معادلة العجوري : $y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right)$

$y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a}$

$y + x = \frac{1}{a} - \frac{\ln a}{a}$

∴ $k = \frac{1}{a} - \frac{\ln a}{a} = \frac{1 - \ln a}{a}$

$f(1) = 7$, $f'(1) = 4$ ~B. $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$
 $f'(1)$ اجد

$$h'(x) = \frac{0 + 3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$$

$$h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+9f'(1)}} = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{4+21}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

22
==
اذا $B \sim$ الاقتران $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ اتي انه

$$f''(x) = 4f(x)$$

$$p1. \quad f(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x} \Rightarrow f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} \quad \underline{\underline{b1}}$$

$$f''(x) = 4(e^{2x} + e^{-2x})$$

$$f''(x) = 4f(x)$$

مثال إذا $f(x) \sim e^{ax}$: أُجِبْ قِيَمَةَ لِيَمَاتِ a

التي تكافئ المعادلة $f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) = 0$

$$f'(x) = a e^{ax}, \quad f''(x) = a^2 e^{ax} \quad \underline{\underline{B1}}$$

$$f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) = 0$$

$$a^2 e^{ax} - 7a e^{ax} + 12 e^{ax} = 0 \quad / : e^{ax} \neq 0$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$(a-3)(a-4) = 0$$

$$a = 3, a = 4$$

27

أثبت أن $f(x) = \sin 4x + \cos 4x \sim B$ إذا $\frac{27}{23}$
 $f''(x) + 16f(x) = 0$ الكل

$$f'(x) = 4 \cos 4x - 4 \sin 4x$$

$$f''(x) = -16 \sin 4x - 16 \cos 4x$$

$$f''(x) + 16 \sin 4x + 16 \cos 4x = 0$$

$$f''(x) + 16 (\underbrace{\sin 4x + \cos 4x}_{f(x)}) = 0 \Rightarrow f''(x) + 16f(x) = 0$$

(*) يعطى ضمنى بالمعادلة الوسيطة $y = 2 \cos \phi$

أثبت أنه $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ، $x = \sin^2 \phi$ الكل
 $\frac{26}{25}, \frac{25}{24}, \frac{24}{23}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin \phi}{2 \sin \phi \cos \phi} = \frac{-1}{\cos \phi}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sec \phi$$

أوجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$ الكل
 $\frac{25}{24}$

$$\text{الميل} = \sqrt{2} \Rightarrow -\sec \phi = \sqrt{2}$$

$$\sec \phi = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = 2 \cos \phi \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{2}}$$

$$x = \sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2} (x - \frac{1}{2}) \quad \text{معادلة المماس} \quad (\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$$

$$y = \sqrt{2} x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} x - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{28}$$

26 أوجد النقطة التي يكون عندها المحاور موازيًا للمحور y .

الحل المحاور موازي للمحور $y \Leftrightarrow \text{معرّف} = \text{المحل}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sec \phi = \frac{-1}{\cos \phi} \Rightarrow \cos \phi = 0$$

$$y = 2 \cos \phi = 2(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$x = \sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = 1 - 0 = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow \text{النقطة } (1, 0)$$

27 ليكن الاقتران $v(t) = 15t e^{-0.05t^2}$ السرعة بالمتري كل ثانية

لسيارة تتحرك بخط مستقيم ، $0 \leq t \leq 10$

احد سرعة السيارة عندما يكون تسارعها صفراً .

الحل

$$a(t) = v'(t) = 15t * -0.1t e^{-0.05t^2} + e^{-0.05t^2} * 15$$

$$a(t) = -1.5t^2 e^{-0.05t^2} + 15 e^{-0.05t^2} = 0$$

بالقسمة على $e^{-0.05t^2}$ نحصل على

$$-1.5t^2 + 15 = 0 \Rightarrow 1.5t^2 = 15$$

$$t^2 = \frac{15}{1.5} \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$$

هنا المطلوب هو

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10} e^{-0.5}$$

$$= \frac{15\sqrt{10}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}} \text{ m/s}$$

29

⊛ أجِد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة بالأسفل

29 / 28

27 29

$$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = \frac{1}{4}$$

$$f(u) = u + \sec^2 u \Rightarrow f'(u) = 1 + 2 \sec u \cdot \sec u \cdot \tan u$$

$$f'(u) = 1 + 2 \sec^2 u \tan u$$

$$f'(u) = 1 + 2 \sec^2 \pi x \tan \pi x$$

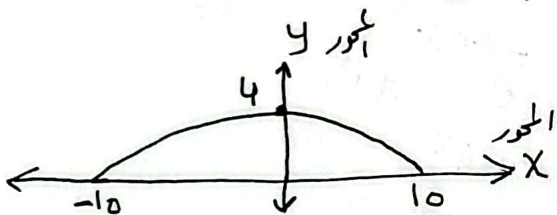
$$= 1 + 2 \sec^2 \pi x \tan \pi x$$

$$u = g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi$$

$$(f \circ g)'(\frac{1}{4}) = f'(g(\frac{1}{4})) * g'(\frac{1}{4})$$

$$= f'(\frac{\pi}{4}) * \pi = (1 + 2 * 2 * 1) * \pi$$

$$= 5\pi$$



27 ... يمثل الشكل قطب سرعة

صغير لتخفيف سرعة السيارات

إذا كانت المعادلة الوسيطة تمثل منحني القطب وهي

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = 10 \sin t, \quad y = 2 + 2 \cos 2t$$

أجد كل ما يأتي

31 : جد قيمة t عند أعلى نقطة
الكل عند أعلى نقطة (قيمة) المماس أفقي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4 \sin 2t}{10 \cos t} = 0$$

$$\sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 10 \sin t = 10(0) = 0$$

$$y = 2 + 2 \cos 2t$$

$$y = 2 + 2(1 - 2 \sin^2 t) = 4$$

$$2 + 2 \cos 2t = 4$$

$$\cos 2t = 1 \Rightarrow t = 0 \quad 30$$

32 جد ميل المماس عند t

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4 \sin 2t}{10 \cos t}$$

$$= \frac{-4 * 2 \sin t \cos t}{10 \cos t}$$

$$= -\frac{4}{5} \sin t$$

$$x = 2\sin 2t \quad , \quad y = 3\cos t \quad \text{27 ص 32}$$

أوجد ميل المماس لمنحنى الجداره عند نقطة الأصل .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$

الحل

$$y = 0 \Rightarrow 3\cos t = 0 \quad (x, y) \text{ عند نقطة الأصل } (0, 0)$$

$$\cos t = 0 \Rightarrow t = \boxed{\frac{\pi}{2}}, \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$x = 0 \Rightarrow 2\sin 2t = 0 \Rightarrow \sin 2t = 0$$

$$2t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$$

$$t = 0, \boxed{\frac{\pi}{2}}, \pi, \boxed{\frac{3\pi}{2}}, 2\pi$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ تحقق الشرطين عندما}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3(1)}{4(1)} = -\frac{3}{4} = \frac{3}{-4} \quad \text{ميل المماس الأول هو}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3(-1)}{4(1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \quad \text{ميل المماس الثاني}$$

$$f(x) = x \sec x \quad \text{مثال اذا B} \sim \text{اشي ان } f'(x) = \sec x (1 + x \tan x)$$

$$f'(x) = x \sec x \tan x + \sec x = \sec x (1 + x \tan x) \quad \text{الحل}$$

مثال $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ حدد $f''(x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{x^4} - \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x (2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^3} - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{-2 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

مثال يعطى طول مستطيل بالمقدار $(6t+5)$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث t الزمن اوجد معدل تغير المساحة بالنسبة للزمن

الحل
 العرض * الطول = A

$$A = (6t+5) * \sqrt{t}$$

معدل التغير $\frac{dA}{dt} = (6t+5) * \frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} (6)$

$$= \frac{6t+5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}$$

$$= 3t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}$$

$$= 3\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}$$

مثال إذا $y = \tan x - \cot x$ اشته أن $y' = 4 \csc^2(2x)$ الحل

$$y' = \sec^2 x + \csc^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{(\cos x \sin x)^2}$$

$$\boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x}$$

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

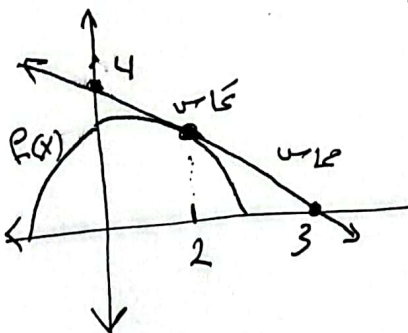
$$y' = 4 \csc^2(2x)$$

مثال $y = \sqrt{\sin^3 \sqrt{x}}$ الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3 \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2 * \sqrt{\sin^3 \sqrt{x}}$$

$$= \frac{3 \cos \sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}{4 \sqrt{x} \sqrt{\sin^3 \sqrt{x}}}$$



مثال معادلة المماس عند $f'(2)$

الحل ميل المماس العاقل بين $f'(2)$

النقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$

$$\therefore f'(2) = \frac{4-0}{0-2} = -\frac{4}{2}$$